1. (6 punti) Per $\beta = 2$ e per $\beta = 3$ risolvete il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = e^{\beta t}\,; \\ y(0) = 0\,, \\ y'(0) = -1\,. \end{cases}$$

È un'equazione lineare del 2° ordine, a coefficienti costanti, non-omogenea.
Per determinare le soluzioni dell'omogenea, troviamo le radici del polinomio associato

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \text{per} \quad r = \frac{+1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -1\,. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'omogenea dunque sono $y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$, $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$.

Nel caso $\underline{\beta = 3}$ la soluzione particolare è della forma $y_*(t) = Ae^{3t}$.

Si ha $y_*'(t) = 3Ae^{3t}$, $y_*''(t) = 9Ae^{3t}$ e dunque si vuole

$$\underbrace{9Ae^{3t} - (3Ae^{3t}) - 2(Ae^{3t})}_{4Ae^{3t}} = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad A = 1/4\,.$$

Le soluzioni della non-omogenea quindi sono

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + 1/4\, e^{3t}.$$

Imponendo i dati di Cauchy, essendo $y'(t) = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} + 3/4\, e^{3t}$, si ha

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1/4 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + 3/4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad 3c_1 + 1 = -1 \Rightarrow c_1 = -2/3\,,\ c_2 = +2/3 - 1/4 = 5/12$$

e la soluzione del problema di Cauchy è $\boxed{y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{5}{12}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}.}$

Nel caso $\beta = 2$ la soluzione particolare è della forma $y_*(t) = Ate^{2t}$ (Ae^{2t} è soluzione dell'omogenea ...). Si ha $y_*'(t) = Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$,
$y_*''(t) = 2Ae^{2t} + 2Ae^{2t} + 4At\,e^{2t}$ e dunque si richiede

$$\underbrace{\cancel{4Ate^{2t}} + 4Ae^{2t} - (\cancel{2Ate^{2t}} + Ae^{2t}) - 2(\cancel{Ate^{2t}})}_{3Ae^{2t}} = e^{2t} \quad \Rightarrow \quad A = 1/3\,.$$

Le soluzioni della non-omogenea quindi sono $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + 1/3\, te^{2t}$, e imponendo i dati di Cauchy ($y'(t) = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} + 1/3\, e^{2t} + 2/3\, te^{2t}$)

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + 1/3 = -1 \end{cases} \Rightarrow 3c_1 + 1/3 = -1 \Rightarrow c_1 = -4/9\,,\ c_2 = 4/9\,,$$

e la soluzione del problema di Cauchy è $\boxed{y(t) = -4/9\, e^{2t} + 4/9\, e^{-t} + 1/3\, te^{2t}.}$

ANALISI 1	21 febbraio 2011

2. (6 punti) Calcolate il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse Y l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x + \sin x, x \in [0, 2\pi]\}$.

Il volume richiesto è dato dalla formula

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x\,(x + \sin x)\,dx = 2\pi \int_0^{2\pi} (x^2 + x \sin x)\,dx\,.$$

Si ha:

$$\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}\,.$$

$$\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx \underset{\text{per parti}}{=} -x\cos x\Big|_{x=0}^{x=2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x\,dx = -2\pi + \operatorname{sen} x\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = -2\pi.$$

Il volume richiesto è dunque

$$V = 2\pi\left(\frac{8\pi^3}{3} - 2\pi\right) = \frac{16\pi^4}{3} - 4\pi^2\,.$$

ANALISI 1	21 febbraio 2011

3. (6 punti) Determinate il polinomio di Taylor di centro $x_0 = 0$ e di terzo grado della funzione $g(x) = \sin(\log(1+2x)) + \cos(xe^{x^2})$. [Suggerimento: è conveniente utilizzare gli sviluppi noti di $\sin t$, $\cos t$, e^t, $\log(1+t)$ per t vicino a 0.]

Il polinomio richiesto è

$$P_3(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 + \frac{1}{6}g'''(0)x^3.$$

Calcolando $g(0), g'(0), g''(0)$ e $g'''(0)$ si ottiene il risultato direttamente.

Seguendo il suggerimento, si ha, per t vicino a 0:

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\ ;\quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\ ;\quad e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\ ;$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3).$$

[il termine successivo è $-\frac{1}{24}t^4$...

Dunque (si ha: $\log(1+2x) \sim 2x$, $o(\log(1+2x)) = o(x)$; $xe^{x^2} \sim x$, $o(xe^{x^2}) = o(x)$...)

$$\sin(\log(1+2x)) = \log(1+2x) - \frac{1}{6}(\log(1+2x))^3 + o(x^3) \overset{\boxed{*}}{=} 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) -$$

$$-\frac{1}{6}\left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)^3 = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}(2x)^3 =$$

$$= 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3);$$

$$\cos(xe^{x^2}) = 1 - \frac{1}{2}(xe^{x^2})^2 + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^2(1 + x^2 + o(x^2))^2 + o(x^3) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2(1 + 2x^2 + o(x^2)) + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

[Sviluppando il quadrato...

Dunque

$$P_3(x) = 1 + 2x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3.$$

[Qualche commento: si hanno vari possibili sviluppi

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) =$$

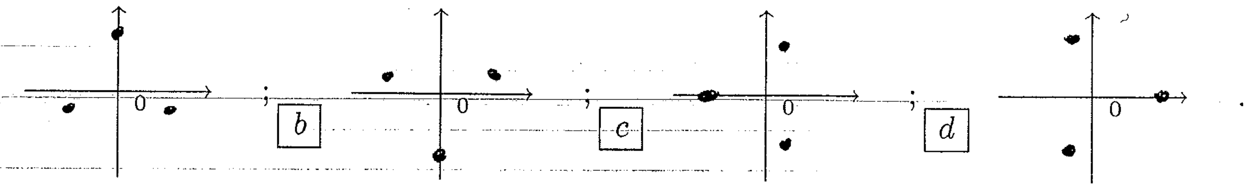
$$= 2x + o(x),$$

e a seconda della situazione se ne può usare uno oppure un altro. Per esempio in $\boxed{*}$ è opportuno scrivere $\log(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3)$, ma basta scrivere $(\log(1+2x))^3 = (2x + o(x))^3$, poiché si sta cercando il polinomio di Taylor di terzo grado. Noi abbiamo scritto $(\log(1+2x))^3 = \left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)^3$, e sviluppando la terza potenza si ottiene comunque $(2x)^3 + o(x^3)$.]

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello		21 febbraio 2011
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Le radici terze di $-2i$ sono:



$\boxtimes$ a; $\boxed{b}$; $\boxed{c}$; $\boxed{d}$

2. La retta passante per l'origine e tangente al grafico di $g(x) = x^3 + \frac{4}{3}$ è: $\boxed{a}$ $y = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\,x$; $\boxed{b}$ $y = \sqrt[3]{3}\,x$; $\boxtimes$ $y = \sqrt[3]{12}\,x$; $\boxed{d}$ $y = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\,x$.

3. Sia g una funzione continua, definita in $\mathbf{R}$ e tale che $g(x) = -g(-x)$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ $g(x^2) = g(-x^2)$; $\boxed{b}$ $\int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$; $\boxed{c}$ g non ha punti di massimo; $\boxtimes$ L'equazione $g(x) = 0$ ha sempre soluzione .

4. Indicate quale dei seguenti integrali generalizzati è convergente? $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x + e^{-x}}{x^2+1}\,dx$; $\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^2}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2e^{-x} + x^3}{x^4+1}\,dx$.

5. Indicate per quale delle seguenti funzioni il punto $x = 1$ è un punto di minimo relativo ? $\boxed{a}$ $x^5 + x^4 - 2$; $\boxed{b}$ $(x-1)^5 - (x-1)^4$; $\boxtimes$ $(x-1)^5 + (x-1)^4$; $\boxed{d}$ $(x-1)^4 + (x-1)^3$.

6. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxtimes$ Se $a_{n+1} \le \frac{2}{3}a_n$ allora la serie è convergente; $\boxed{b}$ Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ allora la serie è convergente; $\boxed{c}$ Se $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = 0$ allora la serie è convergente; $\boxed{d}$ Se la serie è convergente allora $a_{n+1} \le a_n$ per tutti gli n sufficientemente grandi.

7. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

soddisfa $\boxed{a}$ $y(2) = 3^{\frac{1}{2}}$; $\boxed{b}$ $y(1/2) = 2$; $\boxtimes$ $y(1/4) = 2^{\frac{1}{2}}$; $\boxed{d}$ $y(1) = 2^{\frac{2}{3}}$.

8. Sia $f(x) = \frac{|x|^\alpha}{x}$, per $x \ne 0$ e $f(0) = 0$. Quale è l'insieme degli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali il punto $x = 0$ è un punto a tangente verticale del grafico di f? $\boxed{a}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{b}$ $0 < \alpha < 1$; $\boxtimes$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{d}$ $3 < \alpha < 4$.