COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Analisi Matematica II (EA)

21 giugno 2013

Esercizio 1 (8 punti) Si verifichi se il campo vettoriale

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}(y^2+z^2-x^2, -2xy, -2xz)$$

è conservativo, motivando la risposta. Se è possibile, se ne determini un potenziale.

Risultati: | Sì, è conservativo | $\varphi(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} + k_0, \ k_0 \in \mathbb{R}$ |

Calcoli:

Il campo vettoriale $\vec{v}$ è definito in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, che è un insieme semplicemente connesso. Dunque per essere conservativo è necessario e sufficiente che sia irrotazionale. Calcoliamo rot $\vec{v}$. Si ha:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{-2y(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{2}} + 2xy\, 2\cancel{(x^2+y^2+z^2)}\, 2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2y(4x^2-x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{2y(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{2}} - (y^2+z^2-x^2)\, 2\cancel{(x^2+y^2+z^2)}\, 2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2y(x^2+y^2+z^2-2y^2-2z^2+2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3},$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{2z(3x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{2z(3x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$ [conti analoghi a quelli precedenti...

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} = -2xz(-2)\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\cdot 2y, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = -2xy(-2)\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\cdot 2z,$$

e dunque rot $\vec{v} = \vec{0}$.

Per determinare un potenziale, partiamo da $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$:

$$\varphi = \int -\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dy = +x\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + k(x,z),$$

quindi

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x^2+y^2+z^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \Rightarrow k(x,z) = \hat{k}(z),$$

e ancora

$$\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \hat{k}'(z) \Rightarrow \hat{k}'(z) = 0 \Rightarrow \hat{k}(z) = k_0 \in \mathbb{R}.$$

Dunque $\varphi(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} + k_0, \ k_0 \in \mathbb{R}.$

Esercizio 2 (7 punti) Si determinino i punti stazionari in $\mathbf{R}^2$ della funzione $f(x,y) = x^2y - 2x - y$, e si stabilisca di che tipo sono. Si calcoli quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto di f sul quadrato $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$.

Risultati:

$(1,1)$, di sella $(-1,-1)$, di sella	$f(-2,2) = 10$, max. assoluto $f(2,-2) = -10$, min. assoluto

Calcoli:

Si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$, dunque $\nabla f = (0,0)$ per $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

I punti stazionari sono dunque $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

Le derivate seconde sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, per cui la matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $(x,y) = (1,1)$ ha determinante negativo, e il punto $(1,1)$ è di sella.
Per $(x,y) = (-1,-1)$ ha determinante negativo, e il punto $(-1,-1)$ è di sella.

Calcoliamo f sui bordi di Q.

(*) $x = 2 \rightsquigarrow f(2,y) = 3y - 4$, strettamente crescente.

(*) $x = -2 \rightsquigarrow f(-2,y) = 3y + 4$, strettamente crescente.

(*) $y = -2 \rightsquigarrow f(x,-2) = -2x^2 - 2x + 2 = -2(x^2 + x - 1)$.
Derivando rispetto a x si ha $-2(2x+1) > 0$ per $x < -1/2$.
Dunque f ristretta al lato $y = -2$ cresce per $-2 < x < -1/2$, decresce per $-1/2 < x < 2$.

(*) $y = 2 \rightsquigarrow f(x,2) = 2x^2 - 2x - 2 = 2(x^2 - x - 1)$.
Derivando rispetto a x si ha $2(2x-1) > 0$ per $x > 1/2$.
Dunque f ristretta al lato $y = 2$ cresce per $1/2 < x < 2$, decresce per $-2 < x < 1/2$.

Calcoliamo f nei vertici e nei punti $(1/2, 2)$ e $(-1/2, -2)$ [nei punti stazionari interni non è necessario, poiché sono punti di sella]:

$f(-2,-2) = -2$, $f(-2,2) = 10$, $f(2,-2) = -10$, $f(2,2) = 2$,

$f(1/2, 2) = -5/2$, $f(-1/2,-2) = 5/2$.

Quindi il massimo assoluto è 10, nel punto $(-2,2)$, e il minimo assoluto è -10, nel punto $(2,-2)$.

Esercizio 3 (7 punti) Si stabilisca se la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} + x\cos y & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$. In caso affermativo, si determini il piano tangente al grafico di g nel punto $(0,0,g(0,0))$.

Risultato: | Sì, è differenziabile | $z = x$ |

Calcoli:

La funzione $x\cos y$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ (è infinitamente derivabile). Dunque basta considerare

$$\hat{g}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

e poi ragionare su $g(x,y) = \hat{g}(x,y) + x\cos y$.

Sugli assi $\{x=0\}$ e $\{y=0\}$ si ha $\hat{g}(x,y) = 0$, dunque vale $\nabla\hat{g}(0,0) = (0,0)$. Il controllo della differenziabilità si riduce quindi a controllare se

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^3y}{x^2+y^2} - \hat{g}(0,0) - \nabla\hat{g}(0,0)\cdot(x,y)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

In coordinate polari: $0 \leq \left|\dfrac{\rho^4\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta}{\rho^3}\right| \leq \rho \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$.

Dunque $\hat{g}$ è differenziabile in $(0,0)$, e anche g.

Per determinare il piano tangente, calcoliamo il gradiente di g in $(0,0)$. Si ha $\nabla\hat{g}(0,0) = (0,0)$, $\nabla(x\cos y) = (\cos y, -x\,\text{sen}\,y)$, per cui $\nabla(x\cos y)|_{(0,0)} = (1,0)$, e $\nabla g(0,0) = (1,0)$.

Il piano tangente è dato da

$$z = g(0,0) + \nabla g(0,0)\cdot(x,y) = x.$$

Esercizio 4 (8 punti) Sia Σ la superficie ottenuta intersecando il piano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z+y-3=0\}$ con la palla di centro $(0,2,0)$ e raggio 1. Si calcoli l'area di Σ.

Risultato: $\boxed{\text{area}(\Sigma) = \pi/2 .}$

Calcoli:

La palla di centro $(0,2,0)$ e raggio 1 è data da

$$x^2+(y-2)^2+z^2 \leq 1 .$$

Intersecando il piano con la superficie della palla si ha

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2+z^2=1 \\ z+y-3=0 \end{cases} \rightarrow x^2+(y-2)^2+(y-3)^2 = 1 \rightarrow x^2+2y^2-10y+12=0 .$$

Risolvendo si ottiene $x^2+2(y^2-5y+25/4)-\frac{25}{2}+12 = x^2+2(y-5/2)^2-\frac{1}{2}=0$, che è l'equazione dell'ellisse $2x^2+4(y-5/2)^2=1$, di centro $(0,5/2)$ e semiassi $1/\sqrt{2}$ e $1/2$.

Dunque una parametrizzazione di Σ è data da

$$\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=3-y=f(x,y) \end{cases}, (x,y)\in E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{1/2}+\frac{(y-5/2)^2}{1/4}\leq 1\right\}.$$

L'elemento d'area è $dS=\sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+|(0,-1)|^2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$. In conclusione

$$\text{area}(\Sigma) = \iint_E \sqrt{2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \sqrt{2}\, \rho \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2},$$

avendo utilizzato le coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta \\ y=5/2+\frac{1}{2}\rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}, \quad dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\rho\, d\rho\, d\theta, \quad \begin{matrix}\theta\in[0,2\pi] \\ \rho\in[0,1] .\end{matrix}$$