COGNOME NOME Matr.

Analisi Matematica 2

21 giugno 2018

Esercizio 1. Determinare, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y,z) = e^{2+\log(|x|y^2z^2+1)}$$

in $\mathbf{R}^3$. Determinare inoltre, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto di f in

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Soluzione:

$$f(x,y,z) = e^2\,(|x|y^2z^2+1)$$

$f \geq e^2 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e $f = e^2 \iff x=0 \lor y=0 \lor z=0$

$\Rightarrow \exists \min\limits_{\mathbb{R}^3} f = e^2$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,1,1) = +\infty$$

$\Rightarrow \nexists \max\limits_{\mathbb{R}^3} f$ e $\sup\limits_{\mathbb{R}^3} f = +\infty$.

in $\mathring{C}$: $f(x,y,z) = e^2(xy^2z^2+1)$ (perché?).

e dunque i punti $(x,0,z)$, $(x,y,0)$ con $(x,y,z) \in \mathring{C}$ sono di minimo assoluto.

in ∂C : ovviamente $(x,0,z)$, $(x,y,0)$ con $(x,y,z) \in \partial C$ sono di minimo assoluto per f.

Per determinare il massimo assoluto, procediamo ~~usando~~ parametrizzando ∂C.

$$\begin{cases} x = \sin\varphi \cos\theta \\ y = \sin\varphi \sin\theta \\ z = \cos\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in [0,\pi] \quad \theta \in [0,2\pi).$$

per $(\varphi,\theta) \in (0,\pi)\times(0,2\pi)$

$$g(\varphi,\theta) = e^2\left(\sin^3\varphi \cos\theta \sin^2\theta \cos^2\varphi + 1\right)$$

$$g_\theta = e^2\left[-\sin^3\varphi \sin^3\theta \cos^2\varphi + 2\sin^3\varphi \cos^2\theta \sin\theta \cos^2\varphi\right].$$

$$g_\varphi = e^2\left[3\sin^2\varphi \cos^3\varphi \cos\theta \sin^2\theta - 2\sin^4\varphi \cos\theta \sin^2\theta \cos\varphi\right]$$

$$g_\theta = 0 \iff \sin\theta \sin^3\varphi \cos^2\varphi\left[\underbrace{-\sin^2\theta}_{-1+\cos^2\theta} + 2\cos^2\theta\right] = 0$$

$$\iff \sin\theta \sin^3\varphi \cos^2\varphi\left[3\cos^2\theta - 1\right] = 0.$$

$\iff \theta = \pi$ $\qquad (\varphi,\pi)\ \forall \varphi \in (0,\pi)$ son sol.

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\qquad (\frac{\pi}{2},\theta)$ son. sol. $\forall \theta \in (0,2\pi)$

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{2}{3}$$

$$g_\varphi = \pm 3\sin^2\varphi \cos^3\varphi \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{2}{3} - 2\sin^4\varphi\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{2}{3}\cos\varphi = 0.$$

$$\iff \pm\cos^3\varphi \mp \sin^2\varphi \cos\varphi = 0.$$

$$\iff \cos\varphi\left(\pm\cos^2\varphi \mp \sin^2\varphi\right) = 0.$$

$$\cos^2\varphi = \sin^2\varphi \Rightarrow \tan^2\varphi = 1$$

$$\iff \varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi.$$

$(\frac{\pi}{4},\theta)$ $\quad (\frac{3}{4}\pi,\theta)$ con $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

son soluzioni

mentre i punti corrispondenti a $\varphi = 0, \pi$ e $\theta = 0$ sono di minimo.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + e^{3y}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 3xe^{3y}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + \frac{3}{2}\sqrt{z}\right),$$

determinare il suo insieme di definizione e se nel suo insieme di definizione è conservativo; in tal caso determinare tutti i suoi potenziali. Data la curva $\vec{\gamma}$ ottenuta intersecando gli insiemi

$$A_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 9\} \text{ e } A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 2\},$$

si calcoli

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Soluzione:

$D(\vec{F}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \neq (0,0,0) \wedge z \geq 0\}$.
che e' semplicemente connesso.
Questo in aggiunto al fatto che $\text{rot}\,\vec{F} = (0,0,0)$ in $D(\vec{F})$ dimostra che $\vec{F}$ e' conservativo.

$$\partial_x U = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + e^{3y}$$

$$\partial_y U = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 3xe^{3y}$$

$$\partial_z U = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + \frac{3}{2}\sqrt{z}.$$

$$\Rightarrow U = \log(x^2+y^2+z^2) + xe^{3y} + h(y,z)$$

$$\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 3xe^{3y} + h_y = \partial_y U = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 3xe^{3y}$$

$$\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + h_z = \partial_z U = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + \frac{3}{2}\sqrt{z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_y = 0 \\ h_z = \frac{3}{2}\sqrt{z} \end{cases} \Rightarrow h(y,z) = z^{3/2} + c_1.$$

Tutti i potenziali sono:

$$U(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2) + x e^{3y} + z^{3/2} + C$$

γ è una circonferenza nel piano $z=2$.

e dunque $\int_\gamma F = 0$.

Esercizio 3. Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_V \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dxdydz$, ove V è il volume ottenuto dalla rotazione di $A = \{(x,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 1 \le x \le 1 - z^2 + 2z, 0 \le z \le 2\}$ attorno all'asse z.

Soluzione:

In A la variabile x è la distanza dall'asse di rotazione, cioè la variabile ρ in coordinate cilindriche.

L'insieme V può quindi essere descritto in coordinate cilindriche come $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0,2]$, $1 \le \rho \le 1 - z^2 + 2z$.

Si ha quindi

Jacobiano!

$$\iiint_V \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \int_1^{1-z^2+2z} \frac{\cancel{\rho^2}\sin^2\theta}{\cancel{\rho^2}}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta\right) \cdot \int_0^2 dz \left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^{1-z^2+2z}\right) =$$

$$= \pi\,\frac{1}{2}\int_0^2 \left[(1-z^2+2z)^2 - 1\right] dz = \frac{\pi}{2}\int_0^2 (1+z^4+4z^2+4z-4z^3-2z^2-1)\,dz =$$

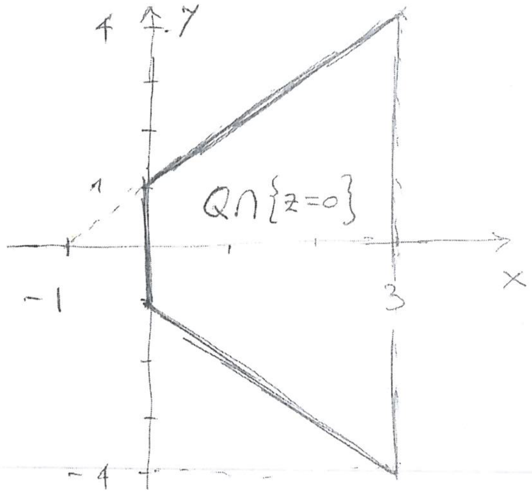
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^2 (z^4 - 4z^3 + 2z^2 + 4z)\,dz = \frac{\pi}{2}\left(\frac{z^5}{5} - z^4 + \frac{2}{3}z^3 + 2z^2\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{16}{3} + 8\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{96-120+80}{15} = \frac{28}{15}\pi.$$

Esercizio 4. Sia $Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x \geq \sqrt{y^2+z^2} - 1, 0 \leq x \leq 3\}$. Si calcoli l'area della superficie $S = \partial Q$.

Soluzione:

Q è un tronco di cono: la sua sezione nel piano (x,y) è



L'area delle due "basi" (per $x=0$ e per $x=3$) è quella di due cerchi, di raggio 1 e 4, rispettivamente. Dunque è π e 16π.

La superficie laterale può essere parametrizzata come un grafico $x = \sqrt{y^2+z^2} - 1$, con $(y,z) \in C$, la corona circolare di raggio minore uguale a 1 e raggio maggiore uguale a 4. Chiamando $f(y,z) = \sqrt{y^2+z^2} - 1$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\cancel{2}z}{\cancel{2}\sqrt{y^2+z^2}}, \quad \sqrt{1+|\nabla f|^2} = \sqrt{1+\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{y^2+z^2}} = \sqrt{2}.$$

Dunque l'area della superficie laterale è

$$\text{area laterale} = \iint_C \underbrace{\sqrt{2}\, dydz}_{\substack{\text{elemento d'area} \\ dS = \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dydz}} = \sqrt{2}\,\text{area}(C) = \sqrt{2}(16\pi - \pi) =$$

$$= 15\sqrt{2}\pi.$$

L'area di $S = \partial Q$ è dunque $(17 + 15\sqrt{2})\pi$.