ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	22 gennaio 2018

1. (6 punti) Si determini il polinomio di Taylor di quarto grado con centro $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \log\left(1 - x^2 + \log(1 + x^2)\right) + \sin\left(\log(1 + 2x)\right) .$$

Si ha, per $t \approx 0$, $s \approx 0$:

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4),$$

$$\sin s = s - \frac{s^3}{6} + o(s^4),$$

per cui

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} + o(x^4),$$

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad , \quad -x^2 + \log(1+x^2) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

$$\log(1 - x^2 + \log(1+x^2)) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

$$\sin(\log(1+2x)) = \log(1+2x) - \frac{[\log(1+2x)]^3}{6} + o(x^4) =$$

$$= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 - \frac{1}{6}\left(2x - 2x^2 + o(x^2)\right)^3 + o(x^4) =$$

$$= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 - \frac{1}{6}\left(8x^3 - 12x^2 \cdot 2x^2 + o(x^4)\right) + o(x^4) =$$

$$= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - \cancel{4x^4} - \frac{4}{3}x^3 + \cancel{4x^4} + o(x^4) =$$

$$= 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^4).$$

In conclusione,

$$P_4(x) = 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{2} .$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	22 gennaio 2018

2. (6 punti) Si disegni il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-8x^2} & , \ x \geq 0 \\ \cos(4 \arctan x) & , \ x < 0 . \end{cases}$$

In particolare, si determinino: limiti all'infinito, eventuali punti di discontinuità, crescenza/decrescenza, convessità/concavità (solo per $x \geq 0$), eventuali punti di massimo (relativo o assoluto) o di minimo (relativo o assoluto).

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha $\lim_{x\to+\infty} xe^{-8x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{8x^2}} = 0$ (l'esponenziale diverge più rapidamente di ogni polinomio) e $\lim_{x\to-\infty} \cos(4 \operatorname{arctg} x) = \cos(4\cdot(-\pi/2)) = \cos(-2\pi) = 1$.

Poi $f(0) = 0 = \lim_{x\to0^+} xe^{-8x^2}$, e $\lim_{x\to0^-} \cos(\operatorname{arctg} x) = \cos 0 = 1$, per cui in $x=0$ c'è una discontinuità di salto.

<u>Per $x \geq 0$</u> si ha $f'(x) = e^{-8x^2} + x(e^{-8x^2})(-16x) = e^{-8x^2}(1-16x^2)$, che è >0 per $1-16x^2>0$, cioè $x<1/4$, ed è <0 per $x>1/4$. Dunque $1/4$ è un punto di <u>massimo relativo</u>, con $f(1/4) = \frac{1}{4}e^{-1/2}$.

<u>Per $x<0$</u>, $4\operatorname{arctg} x$ assume valori fra $4(-\pi/2) = -2\pi$ (escluso) e 0 (escluso): $-2\pi < 4\operatorname{arctg} x < 0$. Dunque si sta valutando il coseno in $(-2\pi, 0)$. Sappiamo che $\cos t = 0$ per $t = -\pi/2$ e $t = -3\pi/2$, e $\cos t = -1$ per $t = -\pi$. Dunque $\cos(4\operatorname{arctg} x) = 0$ per $\operatorname{arctg} x = -\pi/8$ e $\operatorname{arctg} x = -3\pi/8$, e $\cos(4\operatorname{arctg} x) = -1$ per $\operatorname{arctg} x = -\pi/4$. Questo significa $f(x) = 0$ per $x = -\operatorname{tg}\pi/8$ e $x = -\operatorname{tg} 3\pi/8$, e $f(x) = -1$ per $x = -\operatorname{tg}\pi/4 = -1$. Inoltre $f(x)$ decresce per $-\infty<x<-1$ e cresce per $-1<x<0$ (allo stesso modo in cui $\cos t$ decresce per $-2\pi<t<-\pi$ e cresce per $-\pi<t<0$...)(*). Quindi $x=-1$ è un punto di minimo relativo, con valore -1 (è dunque punto di minimo assoluto, tenendo conto che $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$).

<u>Per $x \geq 0$</u> si ha poi $f''(x) = e^{-8x^2}(-16x)(1-16x^2) - 32xe^{-8x^2} = e^{-8x^2}(256x^3 - 48x)$. Quindi f è convessa per $x^2 > 48/256 = \frac{3}{16}$, cioè $x > \sqrt{3}/4$, concava per $0<x<\sqrt{3}/4$.

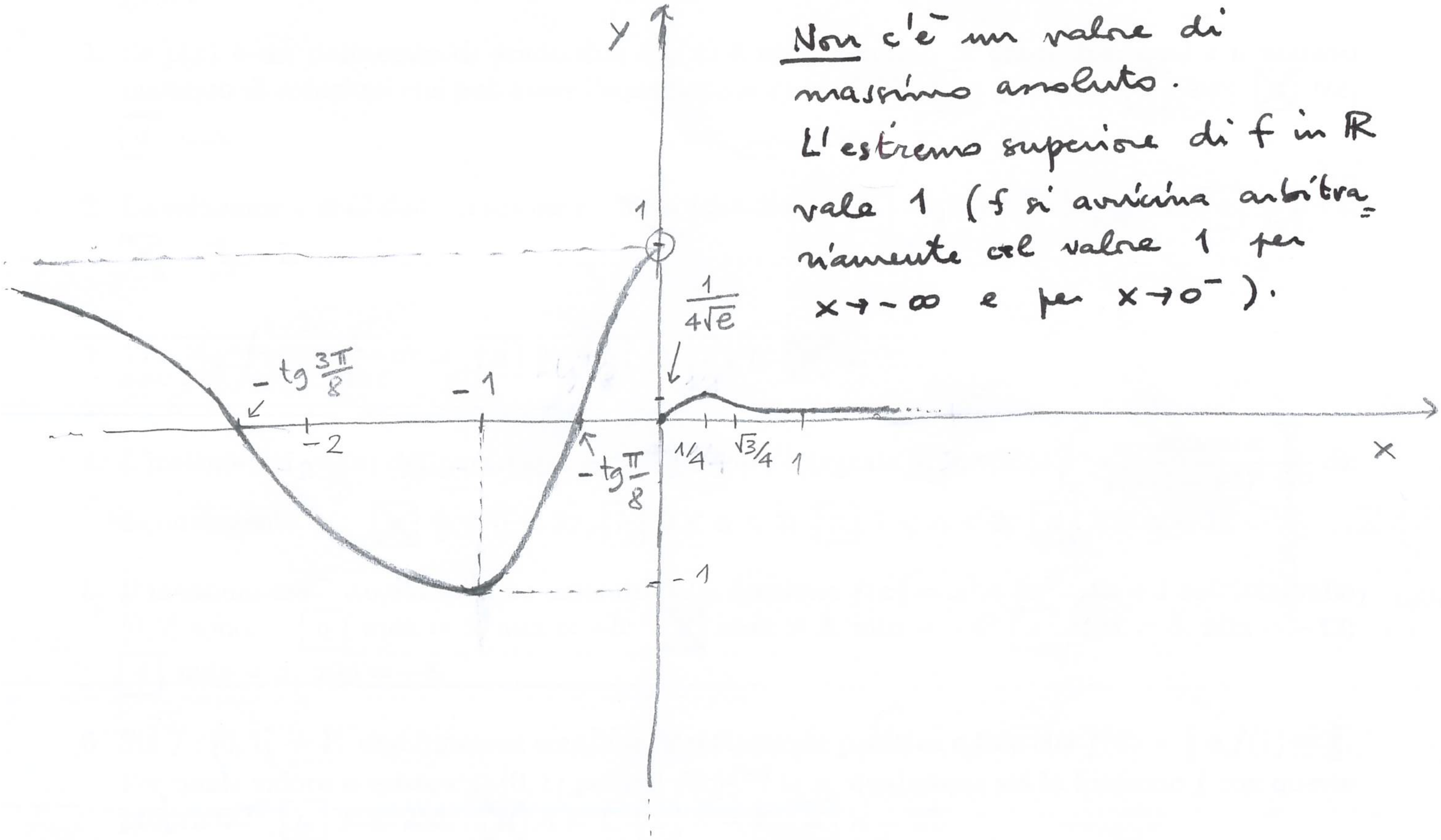
(*) Volendo, per $x<0$ si ha $f'(x) = -\sin(4\operatorname{arctg} x)\cdot\frac{4}{1+x^2}$, dunque il segno è dettato da $-\sin(4\operatorname{arctg} x)$, cioè da $-\sin t$ per $-2\pi<t<0$. C'è quindi crescenza per $-\pi<t<0$ e decrescenza per $-2\pi<t<-\pi$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	22 gennaio 2018

2. (6 punti) Si disegni il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-8x^2} & , \ x \geq 0 \\ \cos(4 \arctan x) & , \ x < 0 \, . \end{cases}$$

In particolare, si determinino: limiti all'infinito, eventuali punti di discontinuità, crescenza/decrescenza, convessità/concavità (solo per $x \geq 0$), eventuali punti di massimo (relativo o assoluto) o di minimo (relativo o assoluto).



Non c'è un valore di massimo assoluto.
L'estremo superiore di f in $\mathbb{R}$ vale 1 (f si avvicina arbitrariamente al valore 1 per $x \to -\infty$ e per $x \to 0^-$).

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	22 gennaio 2018

3. (6 punti) (i) Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 5y(x) = \sin x \\ y(0) = \alpha \,. \end{cases}$$

(ii) Si determini α in modo che la soluzione sia periodica.

(i) È un'equazione lineare del 1° ordine (a coefficienti costanti) non-omogenea.

La soluzione è data dalla formula:

$$y(x) = e^{\int_0^x -5dt}\left(\alpha + \int_0^x e^{\int_0^s 5dt} \sin s \, ds\right) = e^{-5x}\left(\alpha + \int_0^x e^{5s} \sin s \, ds\right).$$

Svolgiamo l'integrale per parti:

$$\int_0^x e^{5s} \sin s \, ds = \frac{1}{5} e^{5s} \sin s \Big|_0^x - \frac{1}{5}\int_0^x e^{5s} \cos s \, ds = \frac{1}{5} e^{5x} \sin x - \frac{1}{5}\left[\frac{1}{5} e^{5s} \cos s\Big|_0^x + \int_0^x \frac{1}{5} e^{5s} \operatorname{sen} s \, ds\right] =$$

$$= \frac{1}{5} e^{5x} \sin x - \frac{1}{25} e^{5x} \cos x + \frac{1}{25} - \frac{1}{25}\int_0^x e^{5s} \sin s \, ds,$$

da cui

$$\int_0^x e^{5s} \sin s \, ds = \frac{25}{26}\left(\frac{1}{5} e^{5x} \sin x - \frac{1}{25} e^{5x} \cos x + \frac{1}{25}\right) =$$

$$= \frac{5}{26} e^{5x} \sin x - \frac{1}{26} e^{5x} \cos x + \frac{1}{26}.$$

Quindi

$$\boxed{y(x) = \left(\alpha + \frac{1}{26}\right) e^{-5x} + \frac{5}{26} \sin x - \frac{1}{26} \cos x}.$$

(ii) Se $\alpha = -\frac{1}{26}$ il termine esponenziale sparisce, e $y(x)$ è periodica.

Si poteva anche risolvere l'omogenea, $y_0(x) = ce^{-5x}$, e poi cercare una soluzione particolare del tipo $y_*(x) = A\cos x + B \sin x$. Questo da $y_*' = -A \sin x + B \cos x$, e $y_*' + 5y_* = (-A+5B)\sin x + (B+5A)\cos x$, che per essere uguale a $\sin x$ richiede $B = -5A$ e $-A - 25A = 1$, cioè $A = -\frac{1}{26}$, $B = \frac{5}{26}$. Dunque

$$y(x) = ce^{-5x} + \frac{5}{26} \sin x - \frac{1}{26} \cos x,$$

e imporre $y(0) = \alpha$ da $c - \frac{1}{26} = \alpha$, $c = \alpha + \frac{1}{26}$.