ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	22 gennaio 2019

1. (6 punti) Si determini l'insieme dei valori dei parametri $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac14} + x^\alpha}{(x^2+4x-5)^{2\beta}}\,dx$$

è convergente. In particolare, si espliciti una coppia di valori $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio è convergente.

Si nota che $x^2+4x-5\,|_{x=1} = 0$. Cercando le radici di x^2+4x-5 si ha

$$x^2+4x-5=0 \longrightarrow x = -2 \mp \sqrt{4+9} = -2 \mp 3 = \begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}.$$

Dunque $(x^2+4x-5) = (x-1)(x+5)$, e si annulla solo per $x=1$ se $x \in [1, +\infty)$.

L'integrale è dunque improprio sia per x vicino a 1 che all'infinito. Si ha:

"$+\infty$" $\quad \dfrac{x^{1/4}+x^\alpha}{(x^2+4x-5)^{2\beta}} \sim \dfrac{x^{\max(1/4,\alpha)}}{x^{4\beta}} = \dfrac{1}{x^{4\beta-\max(1/4,\alpha)}}$.

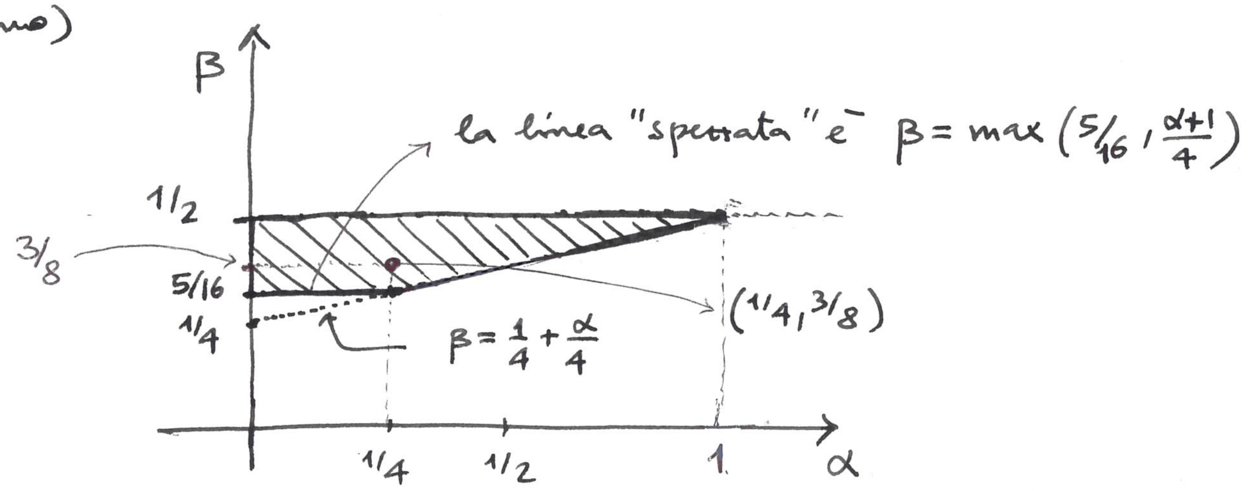
È dunque convergente se $4\beta - \max(1/4, \alpha) > 1$, cioè $\beta > \frac14 + \frac{\max(1/4,\alpha)}{4}$, che si può riscrivere come $\underline{\beta > \max\left(5/16, \frac{\alpha+1}{4}\right)}$.

"1" $\quad \dfrac{x^{1/4}+x^\alpha}{(x^2+4x-5)^{2\beta}} \sim \dfrac{2}{(x+5)^{2\beta}(x-1)^{2\beta}} \sim \dfrac{2}{6^{2\beta}(x-1)^{2\beta}}$.

È dunque convergente per $2\beta < 1$, cioè $\underline{\beta < 1/2}$.

Se si sceglie $\alpha = 1/4$, l'integrale all'∞ va come $\dfrac{1}{x^{4\beta-1/4}}$, e con $4\beta > 5/4$, cioè $\beta > 5/16$, risulta convergente. Per esempio, $\underline{\alpha = 1/4 \text{ e } \beta = 3/8}$.
(rispettando anche la condizione $\beta < 1/2$).

Non richiesto: l'insieme dei valori α e β è (esclusi i segmenti del contorno)



ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	22 gennaio 2019

2. (6 punti) Si determinino eventuali punti di massimo (relativo o assoluto) o di minimo (relativo o assoluto) della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 2x - 4 & , \ x \le -1 \\ \frac{e^x}{1+x} & , \ x > -1 \, . \end{cases}$$

Se ne disegni inoltre il grafico qualitativo (limiti all'infinito, eventuali punti di discontinuità, crescenza/decrescenza; non sono richiesti lo studio della convessità/concavità e la determinazione dei valori di massimo o di minimo).

Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+x} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3+2x^2-2x-4) = -\infty$,

$f(-1) = -1+2+2-4 = -1$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = f(-1) = -1$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{e^x}{1+x} = +\infty$.

Dunque, alcune conclusioni: la funzione f non ha né massimo assoluto né minimo assoluto, ed è discontinua in $x=-1$.

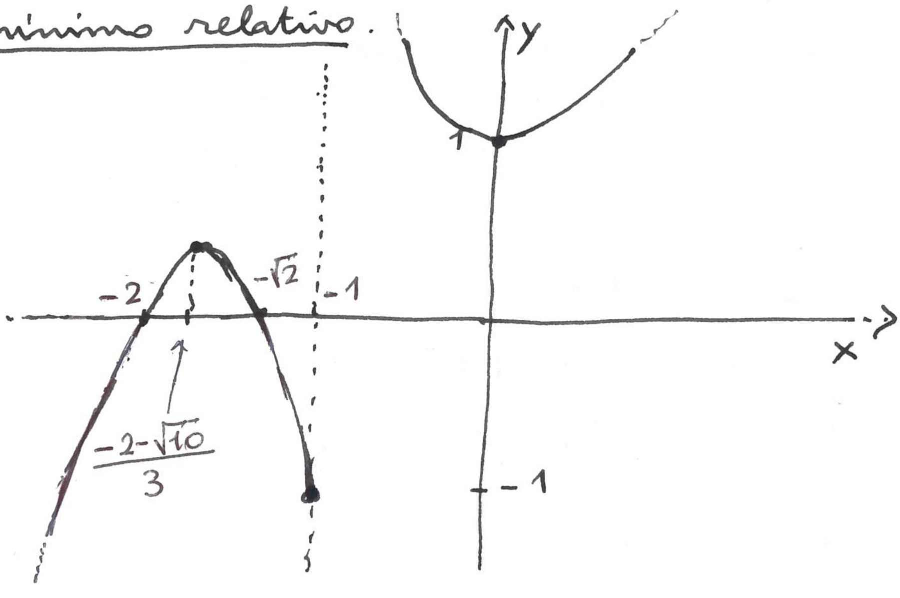
Si ha ancora: $f(0) = \frac{e^x}{1+x}\big|_{x=0} = 1$, $x^3+2x^2-2x-4 = x^2(x+2)-2(x+2)$, per cui $f(x)=0$ per $x=-2$ e $x=-\sqrt{2}$ ($x=\sqrt{2}$ non è nella zona $x\le -1$).

Vediamo le derivate prime: per $\underline{x \le -1}$ si ha $f'(x) = 3x^2+4x-2$, che si annulla per $x = \frac{-2\mp\sqrt{4+6}}{3} = \frac{-2\mp\sqrt{10}}{3}$. Solo $\frac{-2-\sqrt{10}}{3} \le -1$, e dunque f <u>cresce</u> per $x < \frac{-2-\sqrt{10}}{3}$, <u>decresce</u> per $\frac{-2-\sqrt{10}}{3} < x < -1$. Quindi $x = \frac{-2-\sqrt{10}}{3}$ è un punto di <u>massimo relativo</u>.

Per $x>-1$ si ha $f'(x) = \frac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$, che è >0 per $x>0$.

Dunque f <u>decresce</u> per $-1<x<0$ e <u>cresce</u> per $x>0$, e quindi $x=0$ è un punto di <u>minimo relativo</u>.

Abbiamo anche visto che f <u>decresce</u> per x vicino a -1 con $x<-1$, che $f(-1)=-1$ e che $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$. Quindi $x=-1$ è un punto di <u>minimo relativo</u>.



ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	22 gennaio 2019

3. (6 punti) (i) Determinare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 2y = \cos x\,.$$

(ii) Determinare le eventuali soluzioni tali che $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

(iii) Sia y la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione con dati $y(\frac{\pi}{4}) = y'(\frac{\pi}{4}) = 0$. Calcolare $y'''(\frac{\pi}{4})$.

(i) Si tratta di un'equazione differenziale lineare, del 2° ordine, a coefficienti costanti e non-omogenea.
Per determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea si devono trovare le radici del polinomio associato r^2-2r+2.

$$r^2-2r+2=0 \longrightarrow r = 1\mp\sqrt{1-2} = 1\mp i,$$

per cui le soluzioni dell'omogenea sono

$$y_0(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Siccome $\cos x$ non è soluzione dell'omogenea ($e^x\cos x \neq \cos x \ldots$) si può cercare una soluzione della non-omogenea della forma $y_*(x) = A\cos x + B\sin x$. Si ha $y_*' = -A\sin x + B\cos x$, $y_*'' = -A\cos x - B\sin x$, dunque

$$\cos x = y_*'' - 2y_*' + 2y_* = -A\cos x - B\sin x - 2(-A\sin x + B\cos x) + 2A\cos x + 2B\sin x,$$

da cui

$$\cos x = (-A-2B+2A)\cos x = (A-2B)\cos x \longrightarrow A-2B=1 \Rightarrow A = 1+2B \qquad A=1/5.$$

$$0 = (-B+2A+2B)\sin x = (2A+B)\sin x \longrightarrow 2A+B=0 \quad 2(1+2B)+B=0 \Rightarrow B=-\frac{2}{5}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione sono dunque date da

$$y(x) = c_1 e^x\cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Siccome, qualunque siano c_1 e c_2, $c_1 e^x\cos x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $c_2 e^x \sin x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, mentre né $\cos x$ né $\sin x$ hanno limite, e neppure $1/5\cos x - 2/5 \sin x$ (in ogni semiretta $(-\infty, q)$ ci sono infiniti valori in cui vale $1/5$ e infiniti valori in cui vale $-2/5$ …) non esistono soluzioni con la proprietà richiesta.

(iii) Dall'equazione, si ha che una soluzione del problema di Cauchy con dati $y(\pi/4) = y'(\pi/4) = 0$ soddisfa

$$y''(\pi/4) = 2y'(\pi/4) - 2y(\pi/4) + \cos \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'altro canto, $y'''(x) = (y''(x))' = 2y''(x) - 2y'(x) - \sin x$, per cui

$$y'''(\pi/4) = 2y''(\pi/4) - 2y'(\pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$