COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Analisi Matematica II (EA)

22 giugno 2012

Esercizio 1. (7 punti)
Si calcoli l'integrale del campo vettoriale $\mathbf{v}(x,y,z) = (x, y^2, z^3)$ sulla curva $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t^2, \cos t, t + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si determini inoltre se il campo $\mathbf{v}$ è conservativo in $\mathbf{R}^3$.

Risultati: $12\pi^4$ | Il campo $\vec{v}$ è conservativo

Calcoli:

Se il campo $\vec{v}$ fosse conservativo in $\mathbb{R}^3$, l'integrale curvilineo sarebbe molto semplice... Dunque, perché non cominciare dalla seconda domanda?

Si ha $\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v_1}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v_2}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v_2}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v_3}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v_3}{\partial y} = 0$, quindi $\mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$ in $\mathbb{R}^3$. Siccome $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, $\vec{v}$ è un campo conservativo.

Per determinare un potenziale (cosa non richiesta, ma utile per calcolare l'integrale curvilineo...), si ha:

$$\varphi(x,y,z) = \int v_1\,dx + a_1(y,z) = \int x\,dx + a_1(y,z) = \frac{x^2}{2} + a_1(y,z).$$

Poi deve essere $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_2 = y^2$, per cui $a_1(y,z) = \frac{y^3}{3} + a_2(z)$.

Infine si deve avere $\frac{da_2}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_3 = z^3$, per cui $a_2(z) = z^4/4 + c$.

In conclusione, $\varphi(x,y,z) = x^2/2 + y^3/3 + z^4/4 + c$ (e possiamo scegliere $c=0$).

Gli estremi della curva $\vec{\alpha}$ sono $\vec{\alpha}(2\pi) = (4\pi^2, 1, 2\pi)$, $\vec{\alpha}(0) = (0,1,0)$.

Dunque

$$\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \varphi(4\pi^2, 1, 2\pi) - \varphi(0,1,0) = 8\pi^4 + 1/3 + 4\pi^4 - 1/3 = 12\pi^4.$$

Se si vuole proprio calcolare l'integrale... si ha $\alpha'(t) = (2t, -\mathrm{sen}\,t, 1+\cos t)$, dunque

$$\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (t^2, \cos^2 t, (t+\sin t)^3)\cdot(2t, -\mathrm{sen}\,t, 1+\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} t^2\cdot 2t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,(-\mathrm{sen}\,t)\,dt + \int_0^{2\pi} (t+\sin t)^3(1+\cos t)\,dt \overset{\uparrow}{=} \left[\begin{array}{l} -\mathrm{sen}\,t = (\cos t)' \\ 1+\cos t = (t+\sin t)' \end{array}\right.$$

$$= \frac{t^4}{2}\Big|_0^{2\pi} + \cos^3 t/3\Big|_0^{2\pi} + (t+\sin t)^4/4\Big|_0^{2\pi} = 8\pi^4 + 4\pi^4 = 12\pi^4.$$

Esercizio 2. (8 punti)
Si determinino i punti stazionari in $\mathbf{R}^3$ della funzione $f(x,y,z) = x^3 + \frac{3}{2}yz^2 - 3xy^2 + z$ e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo oppure sella. Si determinino inoltre il massimo assoluto e il minimo assoluto di f sul segmento congiungente i punti $(-1,-1,2)$ e $(1,1,-2)$.

Risultato:

$\vec{P}_1 = 1/\sqrt{6}\,(1,1,-2)$, sella.	MAX : 2 , in $(1,1,-2)$.
$\vec{P}_2 = 1/\sqrt{6}\,(-1,-1,2)$, sella.	MIN : -2 , in $(-1,-1,2)$.

Calcoli:

Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{2}z^2 - 6xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3yz+1 .$$

Dunque $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ per $\boxed{x=y}$ oppure $x=-y$, che inserito nella seconda equazione $\partial f/\partial y = 0$ dà
$$\frac{3}{2}z^2 - 6x^2 = 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{3}{2}z^2 + 6x^2 = 0.$$
La seconda dà $x=0$ e $z=0$, e dunque anche $y=0$, ma allora $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ non è soddisfatta. Quindi va scartata.
La prima dà $z = 2x$ oppure $\boxed{z=-2x}$, e inserendo il tutto in $\partial f/\partial z = 0$ si ha
$$3x(2x)+1 = 0 \quad \text{oppure} \quad 3x(-2x)+1=0.$$
La prima è impossibile, la seconda dà $6x^2 = 1$, cioè $x = \pm 1/\sqrt{6}$.
In conclusione, i punti stazionari sono: $1/\sqrt{6}\,(1,1,-2)$ e $1/\sqrt{6}\,(-1,-1,2)$. Chiamiamo il primo $\vec{P}_1$ e il secondo $\vec{P}_2$.
L'Hessiano è
$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -6y & 0 \\ -6y & -6x & 3z \\ 0 & 3z & 3y \end{pmatrix},$$

dunque
$$H(\vec{P}_1) = \sqrt{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad , \quad H(\vec{P}_2) = -H(\vec{P}_1).$$
Calcoliamo gli autovalori di $H(\vec{P}_1)$: sono i valori λ che annullano
$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1/2-\lambda \end{pmatrix} = (1/2-\lambda)[(\lambda^2-1)-1] + (1-\lambda)(-1) = -\lambda^3 + \lambda^2/2 + 3\lambda - 2 = P(\lambda).$$
Questo polinomio ha limite $+\infty$ per $\lambda \to -\infty$, e $-\infty$ per $\lambda \to +\infty$; siccome vale -2 per $\lambda = 0$, ha sicuramente una radice strettamente negativa.
Poi vale $P'(\lambda) = -3\lambda^2 + \lambda + 3$, che ha radici $\lambda_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{37}}{6}$. Dunque $P(\lambda)$ decresce per $\lambda < \frac{1-\sqrt{37}}{6}$ e per $\lambda > \frac{1+\sqrt{37}}{6}$. Se nel punto di massimo $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{37}}{6}$ si avesse $P(\lambda_2) \leq 0$, allora $P(\lambda)$ avrebbe una sola

Esercizio 2. (8 punti)
Si determinino i punti stazionari in $\mathbf{R}^3$ della funzione $f(x,y,z) = x^3 + \frac{3}{2}yz^2 - 3xy^2 + z$ e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo oppure sella. Si determinino inoltre il massimo assoluto e il minimo assoluto di f sul segmento congiungente i punti $(-1,-1,2)$ e $(1,1,-2)$.

Risultato:

Calcoli:

(↳ continuazione...)

radice reale, e questo non è possibile, perché una matrice simmetrica 3×3 ha 3 autovalori reali (contati con la loro molteplicità). Dunque $P(\lambda_2) \geq 0$, e $P(\lambda)$ ha due radici positive (o una radice positiva doppia).

In conclusione: $H(\vec{P}_1)$ ha autovalori di segno discorde, e $\vec{P}_1$ è un punto di sella.

Siccome $H(\vec{P}_2) = -H(\vec{P}_1)$, i suoi autovalori sono quelli di $H(\vec{P}_1)$ cambiati di segno: dunque ce ne sono di segno discorde, e $\vec{P}_2$ è un punto di sella.

Si può anche utilizzare il risultato teorico sui "minori di nord-ovest". Questo dice che gli autovalori di $H(\vec{P}_1)$ sono tutti positivi se e solo se i determinanti dei minori di nord-ovest sono tutti positivi; sono tutti negativi se e solo se i determinanti dei minori di nord-ovest sono di segno alterno, cominciando da $H_{11} < 0$.

Siccome si ha $H_{11} > 0$, ci sono autovalori ≥ 0; siccome $\det H = 6\sqrt{6}\left[1/2(-2)+(-1)\right] = -12\sqrt{6} < 0$, ci sono autovalori ≤ 0; siccome non c'è l'autovalore nullo ($P(0) = -2 \neq 0$), ci sono sia autovalori < 0 che autovalori > 0, e il punto $\vec{P}_1$ è di sella.

Una parametrizzazione del segmento che congiunge $(-1,-1,2)$ e $(1,1,-2)$ è $\vec{\alpha}(t) = (t, t, -2t)$, $t \in [-1,1]$. La funzione f su questo segmento dunque vale $f(t,t,-2t) = t^3 + 3/2\, t(-2t)^2 - 3t \cdot t^2 - 2t = 4t^3 - 2t$.

La derivata vale $12t^2 - 2$, e si annulla per $t = \pm 1/\sqrt{6}$.

Si ha $f(-1,-1,2) = -2$, $f(1,1,-2) = 2$, $f(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}) = -4/3\sqrt{6} > -2$, $f(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) = 4/3\sqrt{6} < 2$.

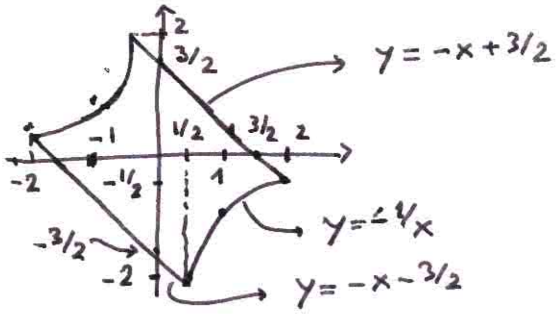
In conclusione: massimo assoluto uguale a 2 in $(1,1,-2)$, minimo assoluto uguale a -2 in $(-1,-1,2)$.

Esercizio 3. (8 punti)
Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq -1, -\frac{3}{2} \leq x+y \leq \frac{3}{2}\}$. Si calcoli $\iint_A xy\, dxdy$.

Risultato: $\boxed{\text{Area} = 5/64 - 2\log 2.}$

Calcoli:

L'insieme $xy=-1$ è dato da due rami di iperbole. L'insieme $x+y=3/2$ è una retta, così come $x+y=-3/2$ (e le due rette sono parallele). L'insieme A è:



La funzione xy è invariante rispetto al cambiamento di variabile $(x,y) \to -(x,y)$, e l'insieme A è simmetrico rispetto allo stesso. Dunque basta fare il conto nella parte di A contenuta nel semipiano $x \geq 0$, e raddoppiare il risultato.

Si ha, per fili verticali:

$$\iint_A xy\,dx\,dy = 2\left[\int_0^{1/2} dx \int_{-3/2-x}^{3/2-x} xy\,dy + \int_{1/2}^{2} dx \int_{-1/x}^{3/2-x} xy\,dy\right] =$$

$$= 2\int_0^{1/2} x\,\frac{y^2}{2}\Big|_{-3/2-x}^{3/2-x} dx + 2\int_{1/2}^{2} x\,\frac{y^2}{2}\Big|_{-1/x}^{3/2-x} dx =$$

$$= \int_0^{1/2} x\left[(3/2-x)^2-(3/2+x)^2\right]dx + \int_{1/2}^{2} x\left[(3/2-x)^2 - 1/x^2\right]dx =$$

$$= -\int_0^{1/2} 6x^2\,dx + \int_{1/2}^{2}\left(9/4\,x - 3x^2 + x^3 - 1/x\right)dx =$$

$$= -2x^3\Big|_0^{1/2} + \frac{9}{8}x^2\Big|_{1/2}^{2} - x^3\Big|_{1/2}^{2} + \frac{x^4}{4}\Big|_{1/2}^{2} - \log|x|\,\Big|_{1/2}^{2} =$$

$$= -1/4 + 9/2 - 9/32 - 8 + 1/8 + 4 - \frac{1}{64} - 2\log 2 = 5/64 - 2\log 2.$$

[For the braves only... È una via alternativa, ma i conti <u>non</u> sono più semplici!]

Si potrebbe utilizzare un cambiamento di variabile, almeno nella zona contenuta nel quadrante $x \geq 0, y \leq 0$ (chiamiamola $\hat{A}$).

Esercizio 3. (8 punti)

Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, xy \geq -1, -\frac{3}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2}\}$. Si calcoli $\iint_A xy\, dxdy$.

Risultato:

Calcoli:

(↳ continuazione...)

Questa zona è descritta da $-3/2 \leq x+y \leq 3/2$ e $-1 \leq xy \leq 0$. Questo suggerisce il cambiamento di variabili $u = x+y$, $v = xy$, con $u \in [-3/2, 3/2]$, $v \in [-1, 0]$.

La matrice jacobiana di (u,v) in funzione di (x,y) ha come elementi $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = x$, per cui il determinante vale $x-y$.

Esprimiamo le variabili (x,y) in funzione di (u,v). Si ha $x = u-y$, quindi $(u-y)y = v$, cioè $y^2 - uy + v = 0$, da cui $y = (u \mp \sqrt{u^2-4v})/2$; essendo $y \leq 0$, bisogna prendere $y = (u - \sqrt{u^2-4v})/2 =: b(u,v)$ (siccome $v \leq 0$, si ha $u^2 - 4v \geq u^2$ e dunque $\sqrt{u^2-4v} \geq |u| \ldots$). Di conseguenza $x = u - y =$
$= (u + \sqrt{u^2-4v})/2 =: a(u,v)$, e $x - y = \sqrt{u^2-4v}$.

In conclusione

$$|\det \mathrm{Jac}_{(u,v)}(x,y)| = \left(1/|\det \mathrm{Jac}_{(x,y)}(u,v)|\right)\Big|_{\substack{x=a(u,v)\\ y=b(u,v)}} = \left(1/|x-y|\right)\Big|_{\substack{x=a(u,v)\\ y=b(u,v)}} = 1/\sqrt{u^2-4v}.$$

Possiamo allora calcolare l'integrale, ricordando che $xy = v$:

$$\iint_{\hat{A}} xy\,dxdy = \int_{-3/2}^{3/2} du \int_{-1}^{0} \frac{v}{\sqrt{u^2-4v}}\, dv = -\frac{1}{4}\int_{-3/2}^{3/2} du \int_{-1}^{0} \frac{-4v+u^2-u^2}{\sqrt{u^2-4v}}\, dv =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{3/2} du \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{u^2-4v} - \frac{u^2}{\sqrt{u^2-4v}}\right) dv = -\frac{1}{2}\int_0^{3/2} du \left[-\frac{1}{6}(u^2-4v)^{3/2}\Big|_{v=-1}^{v=0} + \frac{1}{2}u^2(u^2-4v)^{1/2}\Big|_{v=-1}^{v=0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^{3/2} u^3 du + \frac{1}{4}\int_0^{3/2}\left[u^2(u^2+4)^{1/2} - \frac{1}{3}(u^2+4)^{3/2}\right] du = -\frac{1}{24}u^4\Big|_0^{3/2} + \frac{1}{6}\int_0^{3/2}(u^2+4)^{1/2}(u^2-2)\,du =$$

$$= -\frac{27}{128} + \frac{5}{128} - 2\log 2$$ [avendo usato il cambiamento di variabili $(u^2+4)^{1/2} = u+t$, che dà $u = \frac{4-t^2}{2t}$, $du = -\frac{4+t^2}{2t^2}dt \ldots$].

Resta da calcolare l'integrale sul triangolo $\hat{T} = A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$. Si ha

$$\iint_{\hat{T}} xy\,dxdy = \int_0^{3/2} dx \int_0^{3/2-x} xy\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{3/2} x\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{3/2}\left(\frac{9}{4}x - 3x^2 + x^3\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{9}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \frac{1}{4}\,\frac{81}{16}\right] = \frac{27}{128}.$$

Il risultato finale è:

$$\iint_A xy\,dxdy = 2\left[\iint_{\hat{A}} xy\,dxdy + \iint_{\hat{T}} xy\,dxdy\right] = 2\left(\frac{5}{128} - \log 2\right) = \frac{5}{64} - 2\log 2.$$

Esercizio 4. (7 punti)
Si calcoli l'area dell'insieme contenuto all'interno del segmento $S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, y = 0\}$, del segmento $S_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, -1 - \frac{3}{2}\pi \le y \le 0\}$ e della curva C espressa in coordinate polari da $\{\rho = \theta + 1, \theta \in [0, \frac{3}{2}\pi]\}$.

Risultato: $\boxed{\frac{1}{6}\left[\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)^3-1\right]}$

Calcoli:

Parametrizziamo S_1, S_2 e C. Si ha $\vec{\alpha}_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0,1]$; $\vec{\alpha}_2(t) = (0, t)$, $t \in [-1-3/2\pi, 0]$; $\vec{\alpha}_C(t) = ((t+1)\cos t, (t+1)\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \frac{3}{2}\pi]$.

[La parametrizzazione di C è basata sulle coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ ... e siccome $\rho = \theta + 1$ ...].

Usando il Teorema di Gauss-Green, basta calcolare

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\int_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup C} (-y, x) \cdot d\vec{\ell}\ .$$

Si ha $\vec{\alpha}_1'(t) = (1, 0)$, per cui

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1} (-y, x) \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2}\int_0^1 (0, t) \cdot (1, 0)\, dt = 0.$$

Poi $\vec{\alpha}_2'(t) = (0, 1)$, per cui

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_2} (-y, x) \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2}\int_0^1 (-t, 0) \cdot (0, 1)\, dt = 0.$$

Infine $\vec{\alpha}_C'(t) = (\cos t - (t+1)\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + (t+1)\cos t)$, per cui

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_C} (-y, x) \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2}\int_0^{3/2\pi} (-(t+1)\operatorname{sen} t, (t+1)\cos t) \cdot (\cos t - (t+1)\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + (t+1)\cos t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{3/2\pi} \left(\cancel{-(t+1)\operatorname{sen} t\cos t} + (t+1)^2\operatorname{sen}^2 t + \cancel{(t+1)\cos t\operatorname{sen} t} + (t+1)^2\cos^2 t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{3/2\pi} (t+1)^2\, dt = \frac{1}{6}(t+1)^3 \Big|_0^{3/2\pi} = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)^3 - 1\right].$$

In coordinate polari: al variare di θ, il raggio ρ è compreso fra 0 e $1+\theta$. Dunque, ricordando che lo jacobiano è ρ,

$$\text{Area} = \int_0^{3/2\pi} d\theta \int_0^{1+\theta} \rho\, d\rho = \int_0^{3/2\pi} d\theta\, \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{1+\theta} = \int_0^{3/2\pi} \frac{1}{2}(1+\theta)^2\, d\theta = \frac{(1+\theta)^3}{6}\Big|_0^{3/2\pi} =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(1 + \frac{3}{2}\pi\right)^3 - 1\right].$$