ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	22 giugno 2017

1. (6 punti) Dato l'insieme

$$D_t = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le t\,,\, 0 \le y \le 3x + \sqrt{x^2+1}\}\,,$$

sia $V(t)$ il volume del solido ottenuto ruotando D_t attorno all'asse Y. Si calcoli $V(3)$ e si determini il valore del parametro $\alpha > 0$ per cui

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{V(\alpha t)}{t^2} = \frac{1}{5}\,.$$

Si ha

$$V(t) = 2\pi \int_0^t x\left(3x + \sqrt{x^2+1}\right) dx = 2\pi \int_0^t \left(3x^2 + x\sqrt{x^2+1}\right) dx =$$

$$= 2\pi \left(x^3 \Big|_0^t + (x^2+1)^{3/2} \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \Big|_0^t \right) = 2\pi \left(t^3 + \frac{1}{3}(t^2+1)^{3/2} - \frac{1}{3} \right).$$

Quindi $V(3) = 2\pi\left(27 + \frac{1}{3} 10\sqrt{10} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(80 + 10\sqrt{10}\right).$

Poi

$$V(\alpha t) = 2\pi \int_0^{\alpha t} \left(3x^2 + x\sqrt{x^2+1}\right) dx \quad \left(\text{che} \longrightarrow 0 \text{ per } t \to 0^+ \ldots\right)$$

ed applicando la regola di de l'Hôpital

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{V(\alpha t)}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{[V(\alpha t)]'}{2t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\cancel{2}\pi\left(3\alpha^2 t^2 + \alpha t\sqrt{(\alpha t)^2+1}\right)\alpha}{\cancel{2}t} =$$

$$= \pi \alpha^2\,,$$

da cui

$$\alpha^2 = \frac{1}{5\pi} \implies \alpha = \frac{1}{\sqrt{5\pi}}\,.$$

[Si ricordi che

$$\frac{d}{dt} \int_a^{f(t)} g(x)\,dx = g(f(t)) \cdot f'(t)\,,$$

dunque

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{\alpha t} 2\pi \left(3x^2 + x\sqrt{x^2+1}\right) dx \right) = 2\pi\left(3\alpha^2 t^2 + \alpha t\sqrt{\alpha^2 t^2+1}\right) \cdot \alpha \ldots \,]$$

[Si può anche applicare la regola di de l'Hôpital a $\dfrac{2\pi\left(\alpha^3 t^3 + \frac{1}{3}(\alpha^2 t^2+1)^{3/2} - \frac{1}{3}\right)}{t^2} \ldots$]

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	22 giugno 2017

2. (6 punti) (i) Si determini l'insieme dei valori del parametro $x \in \mathbf{R}$ per cui è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{1+n^3} \left(\frac{3n^2}{1+n^2x^2} \right)^n .$$

(ii) Si determini se è convergente o divergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{1+3n^2} \right)^n$.

(i) È una serie a termini positivi, per cui posso applicare il criterio della radice. Si ha, per $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{1+n^3}\left(\frac{3n^2}{1+n^2x^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{n+2}{1+n^3}}\ \frac{3n^2}{1+n^2x^2}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+2}{1+n^3}}\right)\frac{3}{x^2}.$$

(Per $x=0$ il termine generale $a_n \to +\infty$, dunque la serie diverge.)

Ora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2} = \lim_{n\to\infty} (n+2)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log(n+2)} = 1,$$

poiché il logaritmo diverge più lentamente delle potenze. Analogamente $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n^3} = 1$. Quindi si ha convergenza della serie per $3/x^2 < 1$, cioè $x^2 > 3$, e divergenza per $x^2 < 3$.

Per $x^2 = 3$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{1+n^3}\left(\frac{3n^2}{1+3n^2}\right)^n$. Siccome $0 \leq \frac{3n^2}{1+3n^2} \leq 1$, ne segue che il termine generale è $\leq \frac{n+2}{1+n^3}$, e questa successione è asintoticamente equivalente a $1/n^2$. Quindi, dal teorema di confronto asintotico, la serie è convergente per $x^2 = 3$.

(ii) La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{1+3n^2}\right)^n$ ha termine generale che si comporta così:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{1+3n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log\left(\frac{3n^2}{1+3n^2}\right)}.$$

Poi

$$\log\left(\frac{3n^2}{1+3n^2}\right) = \log\left(\frac{3n^2}{1+3n^2} - 1 + 1\right) = \log\left(1 - \frac{1}{1+3n^2}\right) \sim -\frac{1}{1+3n^2},$$

quindi $\lim_{n\to\infty} n\log\left(\frac{3n^2}{1+3n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{1+3n^2}\right) = 0$, e allora $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{1+3n^2}\right)^n = e^0 = 1$, e la serie diverge perché il termine generale $\not\to 0$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	22 giugno 2017

3. (6 punti) i) Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = (x^2 + 3x - 2)y^{11}.$$

ii) Si determini la soluzione $\overline{y}$ tale che $\overline{y}(0) = -1$.
iii) Per la soluzione $\overline{y}$ del punto precedente, si determini $\overline{y}'(0)$.

(i) È un'equazione differenziale del 1° ordine non-lineare, a variabili separabili. Si ha che $y(x)=0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ è una soluzione, poi si ottiene per $y \neq 0$

$$\frac{dy}{y^{11}} = (x^2+3x-2)\,dx,$$

che dà

$$-\frac{1}{10}y^{-10} = \int \frac{dy}{y^{11}} = \int (x^2+3x-2)\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.
Quindi

$$y^{-10} = -10\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x\right)+\hat{c} = 20x-15x^2-\frac{10}{3}x^3+\hat{c}, \quad \hat{c}\in\mathbb{R},$$

$$y(x) = \pm\sqrt[10]{\frac{1}{20x-15x^2-\frac{10}{3}x^3+\hat{c}}}, \quad \hat{c}\in\mathbb{R},$$

(che, fissato $\hat{c}\in\mathbb{R}$, ha senso per x che soddisfa $20x-15x^2-\frac{10}{3}x^3+\hat{c}>0$).

(ii)
Imponendo il dato di Cauchy si ha

$$-1 = \overline{y}(0) = -\sqrt[10]{\frac{1}{20\cdot 0-15\cdot 0^2-\frac{10}{3}\cdot 0^3+\hat{c}}} \Rightarrow \hat{c}=1,$$

e quindi

$$\overline{y}(x) = -\sqrt[10]{\frac{1}{20x-15x^2-\frac{10}{3}x^3+1}}.$$

(iii)
Direttamente dall'equazione,

$$\overline{y}'(0) = (0^2+3\cdot 0-2)\,\overline{y}(0)^{11} = -2\cdot(-1)^{11} = 2.$$