ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	22 giugno 2020

1. (6 punti) Si determini il polinomio di Taylor di quarto grado e di centro $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \Big(\sin(\log(1+3x))\Big)^2.$$

Si ha $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$ per $t \approx 0$, dunque

$$\sin^2 t = \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2 = t^2 - 2\frac{t^4}{6} + o(t^4).$$

Poi

$$\log(1+3x) = 3x - \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^3}{3} - \frac{81}{4}x^4 + o(x^4),$$

per cui, essendo anche $\log(1+3x) = 3x + o(x)$,

$$\Big(\sin(\log(1+3x))\Big)^2 = \left(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 - \frac{81}{4}x^4 + o(x^4)\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{3}\Big(3x + o(x)\Big)^4 + o(x^4) =$$

$$= 9x^2 + \frac{81}{4}x^4 - 27x^3 + 54x^4 - \frac{1}{\cancel{3}}\overset{27}{\cancel{81}}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 9x^2 - 27x^3 + \left(27 + \frac{81}{4}\right)x^4 + o(x^4) =$$

$$= 9x^2 - 27x^3 + \frac{189}{4}x^4 + o(x^4).$$

Dunque $\boxed{P_4(x) = 9x^4 - 27x^3 + \frac{189}{4}x^4.}$

2. (6 punti) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{2-\sin^2 x}\, dx\,.$$

Si può cambiare variabile ponendo $t = \sin x$, $dt = \cos x\, dx$, $x=0 \longrightarrow t=0$, $x=\pi/2 \longrightarrow t=1$, per cui si ottiene:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{2-\sin^2 x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{2-t^2}\, dt\,.$$

Ora si pone $t=\sqrt{2}\sin s$, $dt=\sqrt{2}\cos s\, ds$, $t=0 \longrightarrow s=0$, $t=1 \longrightarrow \sin s = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow s=\pi/4$, per cui

$$\int_0^1 \sqrt{2-t^2}\, dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2-2\sin^2 s}\ \sqrt{2}\cos s\, ds = \int_0^{\pi/4} 2\sqrt{1-\sin^2 s}\, \cos s\, ds =$$

$$=2\int_0^{\pi/4} \cos^2 s\, ds \underset{\text{per parti}}{=} 2\left[\sin s \cos s \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (-\sin s)\sin s\, ds\right] =$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\pi/4} (1-\cos^2 s)\, ds\right] = 2\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \cos^2 s\, ds\right].$$

Di conseguenza, si è visto che $\int_0^{\pi/4} \cos^2 s\, ds = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \cos^2 s\, ds$, cioè $2\int_0^{\pi/4} \cos^2 s\, ds = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

Si può quindi concludere con

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{2-\sin^2 x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{2-t^2}\, dt = 2\int_0^{\pi/4} \cos^2 s\, ds = \boxed{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}}.$$

Ponendo invece $t=\cos x$ e osservando che $\sqrt{2-\sin^2 x} = \sqrt{1+\cos^2 x}$ si ottiene (essendo $x=\arccos t$, $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, $x=0 \to t=1$, $x=\frac{\pi}{2} \to t=0$)

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\sqrt{2-\sin^2 x}\, dx = -\int_1^0 t\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 t\,\frac{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+t^2}}\, dt =$$

$$= \int_0^1 t\,\frac{1+t^2}{\sqrt{1-t^4}}\, dt = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\, dt + \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^4}}\, dt = \frac{1}{2}\arcsin t^2 \Big|_0^1 + 2\sqrt{1-t^4}\left(-\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	22 giugno 2020

3. (6 punti) (i) Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 3y(x) = 2 - x \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

(ii) Si determini α affinché la soluzione soddisfi $y(\frac{\pi}{\sqrt{3}}) = 0$.

(i) Si tratta di un'equazione lineare del II° ordine a coefficienti costanti, non-omogenea.
Il polinomio associato è r^2+3, per cui le radici sono $r_1 = -\sqrt{3}i$, $r_2 = \sqrt{3}i$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è dunque

$$y_0(x) = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x).$$

Siccome il termine non-omogeneo è un polinomio di 1° grado, si cerca una soluzione particolare del tipo $y_*(x) = Ax+B$.
Siccome $y_*''(x) = 0$, si ha $y_*(x) = \frac{2-x}{3}$.
Dunque la soluzione generale dell'equazione non-omogenea è

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x) + \frac{2}{3} - \frac{x}{3}.$$

Si ha $y'(x) = -\sqrt{3}c_1 \sin(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}c_2 \cos(\sqrt{3}x) - 1/3$, per cui imponendo i dati di Cauchy si ottiene

$$\begin{cases} \alpha = y(0) = c_1 + 2/3 \longrightarrow c_1 = \alpha - 2/3\,. \\ 0 = y'(0) = \sqrt{3}c_2 - 1/3 \longrightarrow c_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$\boxed{y(x) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\cos(\sqrt{3}x) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x) + \frac{2}{3} - \frac{x}{3}.}$$

(ii) Si ha

$$0 = y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\cos\pi + \cancel{\frac{1}{3\sqrt{3}}\sin\pi} + \frac{2}{3} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}.$$