ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	23 gennaio 2015

1. **(6 punti)** Si calcoli
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{1}{6}\sin(3x^2)}{x^2 \mathrm{tg}\,(e^{2x}-1) - 2x\sin(x^2)}.$$

Lo sviluppo di Taylor di cos x è

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Quello di sin t è

$\sin t = t + o(t^2)$, [con un po' di esperienza si vede che non serve arrivare a $t - t^3/6 + o(t^4)$ ...]

quindi

$$\sin(3x^2) = 3x^2 + o(x^4) \quad ; \quad \sin(x^2) = x^2 + o(x^4).$$

Quello di tg t è $\mathrm{tg}\, t = t + o(t^2)$; quello di e^t è $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, dunque (essendo $e^{2x}-1 \approx 2x$, cioè $o((e^{2x}-1)^2) = o(x^2)$)

$$\mathrm{tg}(e^{2x}-1) = e^{2x} - 1 + o(x^2) = 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 2x + 2x^2 + o(x^2).$$

In conclusione

$$\frac{1-\cos x - \frac{1}{6}\sin(3x^2)}{x^2\,\mathrm{tg}(e^{2x}-1) - 2x\sin(x^2)} = \frac{x^2/2 - x^4/24 + o(x^4) - \frac{1}{6}3x^2}{x^2(2x+2x^2+o(x^2)) - 2x^3} =$$

$$= \frac{-x^4/24 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{48}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	23 gennaio 2015

2. (6 punti) (i) Per ciascuna delle serie qui sotto definite si determinino tutti i valori $x \in \mathbf{R}$ per cui essa converge:

$$(A) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} \left(\frac{5x^2 + e^x}{x^2+1} \right)^n \quad , \quad (B) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n+2)} \left(\frac{5x^2 + e^x}{x^2+1} \right)^n .$$

(ii) Si calcoli la somma della serie (A) per $x = 0$ e la somma della serie (B) per $x = 0$.

(i) (A) Scrivendo $t = \frac{5x^2+e^x}{x^2+1}$, abbiamo una serie di potenze in t. Dunque il raggio di convergenza è $r = 1/L$, ove

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5^{n+2}} \cdot 5^{n+1} = \frac{1}{5} . \quad \left[L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{, per la serie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n . \right]$$

Allora la serie converge per $\left| \frac{5x^2+e^x}{x^2+1} \right| < 5$, non converge per $\left| \frac{5x^2+e^x}{x^2+1} \right| > 5$, cioè converge per $e^x < 5$, ossia $x < \log 5$, e non converge (essendo a termini positivi, diverge) per $x > \log 5$. Per $x = \log 5$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} \left(\frac{5\log^2 5 + 5}{\log^2 5+1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}$, che è divergente $\left(\frac{1}{5} \not\to 0 \dots\right)$.

(B) Procedendo in modo analogo, il raggio di convergenza è $r = 1/L$, con

$$L = \lim \frac{1}{5^{n+1}(n+3)} \cdot 5^n(n+2) = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = \frac{1}{5},$$

per cui la serie converge per $x < \log 5$ e non converge per $x > \log 5$. Per $x = \log 5$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$, che è convergente per il criterio di Leibniz.

(ii) (A) La serie richiesta è $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-1/5}\right) = \frac{1}{4}$.

(B) La serie richiesta è $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n+2)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{5^{n+2}(n+2)} \right) 25 = -25 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{5^{n+2}(n+2)} =$

$$\overset{m=n+2}{=} -25 \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{5^m m} \right] = -25 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{5^m m} - \frac{1}{5} \right] = 5 - 25 \log\left(1 + \frac{1}{5}\right) =$$

$= 5 - 25 \log(6/5)$. $\left[\text{Si ricordi } \log(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m}, \ |x| < 1. \right]$

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	23 gennaio 2015

3. (6 punti) Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' = -2e^{-3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \alpha\,; \end{cases}$$

si determini quindi per quale valore di α si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

È un'equazione lineare, del 2° ordine, a coefficienti costanti, non-omogenea.
Il polinomio associato è r^2+3r, per cui le radici sono $r=0$ ed $r=-3$. La soluzione della equazione omogenea è:

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

Il metodo di somiglianza, per trovare una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea, suggerisce di provare con $y_*(x) = Ae^{-3x}$, a meno che questa non sia soluzione dell'equazione omogenea. Quando questo accade, come nel caso in questione, si deve provare con $y_*(x) = Axe^{-3x}$. Calcolando le derivate si ha

$$y_*'(x) = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}\ ;\ y_*''(x) = -3Ae^{-3x} - 3Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x}.$$

Inserendo nell'equazione si ottiene:

$$y_*'' + 3y_*' = 9Axe^{-3x} - 6Ae^{-3x} + 3(Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}) = -3Ae^{-3x},$$

per cui si trova $A = 2/3$.
La soluzione è quindi $y(x) = c_1 + c_2 e^{-3x} + 2/3\, xe^{-3x}$. Imponendo i dati di Cauchy (essendo $y'(x) = -3c_2 e^{-3x} + \frac{2}{3}e^{-3x} - 2xe^{-3x}$) si ha

$$0 = y(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2 \Uparrow\ c_1 = \frac{\alpha}{3} - \frac{2}{9}$$

$$\alpha = y'(0) = -3c_2 + 2/3 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{9} - \frac{\alpha}{3},$$

dunque

$$y(x) = \frac{\alpha}{3} - \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9} - \frac{\alpha}{3}\right)e^{-3x} + \frac{2}{3}xe^{-3x}.$$

Siccome $xe^{-3x} \to 0$ e $e^{-3x} \to 0$ per $x \to +\infty$, la condizione richiesta è $\frac{\alpha}{3} - \frac{2}{9} = 0$, cioè $\alpha = \frac{2}{3}$.