ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	23 gennaio 2017

1. (6 punti) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x) + 9\log(1-x^2)}{(e^{3x}-1)^2(1-\cos(2x))}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x}-1)^2}{(3x)^2} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2/2} = 1 ,$$

per cui il denominatore può essere sostituito da $(3x)^2 \cdot \frac{(2x)^2}{2} = 18x^4$.

Poi si ha

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t) \Rightarrow \log(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^2) ,$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \Rightarrow \sin^2 t = \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2(3x) = (3x)^2 - \frac{(3x)^4}{3} + o(x^4) = 9x^2 - 27x^4 + o(x^4).$$

In conclusione,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x) + 9\log(1-x^2)}{(e^{3x}-1)^2 \log(1-\cos(2x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{9x^2} - 27x^4 + o(x^4) - \cancel{9x^2} - \frac{9}{2}x^4}{18x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{63}{2}x^4 + o(x^4)}{18x^4} = -\frac{63}{36} = -\frac{7}{4}.$$

2. (6 punti) Si disegni il grafico qualitativo della funzione $f(x) = \log\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right|$. In particolare, si determinino: insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, regioni di crescenza/decrescenza, regioni di convessità/concavità, eventuali punti di massimo (locale o assoluto) o di minimo (locale o assoluto). Infine per ogni valore del parametro $k \in \mathbf{R}$ si stabilisca quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

L'insieme di definizione è dato da $1+2x \neq 0$ (per dare senso al denominatore) e $1-2x \neq 0$ (perché non si abbia argomento nullo del logaritmo). Quindi $x \neq -1/2$ e $x \neq 1/2$.

Poi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right| = \lim_{x\to+\infty} \log\underbrace{\left(\frac{2x-1}{1+2x}\right)}_{\to 1} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \log\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right| = \lim_{x\to-\infty} \log\underbrace{\left(\frac{1-2x}{-1-2x}\right)}_{\to 1} = 0,$$

$$\lim_{x\to -1/2^-} \log\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right| = \lim_{x\to -1/2^-} \log\underbrace{\left(\frac{1-2x}{-1-2x}\right)}_{\to +\infty} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1/2^+} \log\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right| = \lim_{x\to -1/2^+} \log\underbrace{\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)}_{\to +\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1/2^-} \log\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right| = \lim_{x\to 1/2^-} \log\underbrace{\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)}_{\to 0^+} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1/2^+} \log\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right| = \lim_{x\to 1/2^+} \log\underbrace{\left(\frac{2x-1}{1+2x}\right)}_{\to 0^+} = -\infty.$$

La derivata vale (sia per $\frac{1-2x}{1+2x} > 0$ che per $\frac{1-2x}{1+2x} < 0$, poiché $(\log|t|)' = \frac{1}{t}$ per $t \neq 0$...)

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1-2x}{\cancel{1+2x}}} \cdot \frac{-2(1+2x)-(1-2x)2}{(1+2x)^2} = \frac{-4}{(1-2x)(1+2x)} = \frac{-4}{1-4x^2} > 0 \text{ per } 4x^2 > 1.$$

Dunque f cresce per $x < -1/2$ e $x > 1/2$, decresce per $-1/2 < x < 1/2$, e $f'(0) = -4$.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = (-4)\frac{(-1)}{(1-4x^2)^2}(-8x) = -\frac{32x}{(1-4x^2)^2} > 0 \quad \text{per } x < 0.$$

Dunque f è convessa per $x < 0$ (con $x \neq -1/2$), concava per $x > 0$ (con $x \neq 1/2$).

Siccome f ha limite $+\infty$ per $x \to -1/2$ e limite $-\infty$ per $x \to 1/2$, <u>non</u> ci sono massimi assoluti o minimi assoluti. Siccome f è strettamente crescente (per $x < -1/2$ e $x > 1/2$) o strettamente decrescente (per $-1/2 < x < 1/2$), non ci sono massimi locali o minimi locali.

Si ha poi $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x < 0$ e $f(x) < 0$ per $x > 0$, per cui c'è un solo valore ($x = 0$) per cui $f(x) = 0$.

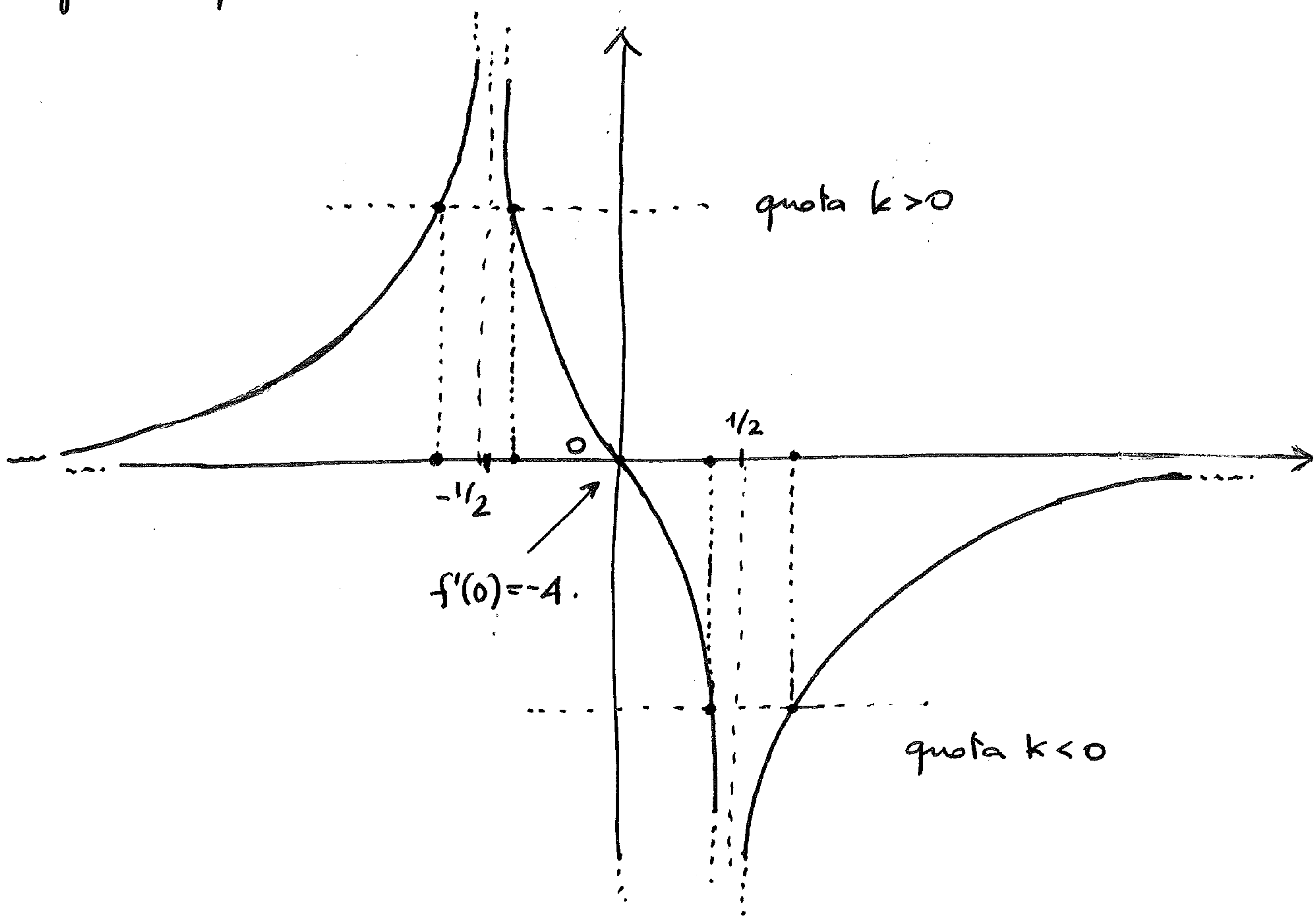
Invece se $k > 0$ ci sono due valori per cui $f(x) = k$, uno in $(-\infty, -1/2)$ (è strettamente crescente e passa da 0^+ a $+\infty$...) e uno in $(-1/2, 0)$ (è strettamente decrescente e passa da $+\infty$ a 0^+...).

Analogamente per $k < 0$ ci sono due valori per cui $f(x) = k$, uno in $(0, 1/2)$ e uno in $(1/2, +\infty)$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	23 gennaio 2017

2. (6 punti) Si disegni il grafico qualitativo della funzione $f(x) = \log\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right|$. In particolare, si determinino: insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, regioni di crescenza/decrescenza, regioni di convessità/concavità, eventuali punti di massimo (locale o assoluto) o di minimo (locale o assoluto). Infine per ogni valore del parametro $k \in \mathbf{R}$ si stabilisca quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Grafico qualitativo.



ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	23 gennaio 2017

3. (6 punti) (i) Si determinino tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^3}{1+(x^4+2)^2} y(x) + \frac{x^3}{1+(x^4+2)^2}.$$

ii) Le soluzioni sono limitate? [Si motivi la risposta.]
iii) Si determinino tutte le soluzioni tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

(i) Si tratta di un'equazione del 1° ordine, lineare, non-omogenea.
La formula risolutiva dà

$$y(x) = e^{\int \frac{x^3}{1+(x^4+2)^2}dx}\left(c + \int e^{-\int \frac{x^3}{1+(x^4+2)^2}dx} \frac{x^3}{1+(x^4+2)^2}dx\right) \overset{\nearrow}{=} \left[\begin{array}{l} t = x^4+2 \\ dt = 4x^3 dx \end{array}\right.$$

$$= e^{\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4+2)}\left(c + \int e^{-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4+2)} \frac{x^3}{1+(x^4+2)^2}dx\right) \overset{\nearrow}{=} \left[\begin{array}{l} s = \operatorname{arctg}(x^4+2) \\ ds = \frac{4x^3}{1+(x^4+2)^2}dx \end{array}\right.$$

$$= e^{\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4+2)}\left(c + \int e^{-\frac{1}{4}s}\frac{1}{4}dx\right) = e^{1/4\operatorname{arctg}(x^4+2)}\left(c - e^{-1/4 s}\right) =$$

$$= e^{1/4\operatorname{arctg}(x^4+2)}\left(c - e^{-1/4\operatorname{arctg}(x^4+2)}\right) = -1 + c\,e^{1/4\operatorname{arctg}(x^4+2)}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

(ii) Siccome $\operatorname{arctg} t \in (-\pi/2, \pi/2)$ per ogni $t\in\mathbb{R}$, le soluzioni <u>sono limitate</u> poiché $e^{1/4\operatorname{arctg}(x^4+2)}$ sta fra $e^{-\pi/8}$ ed $e^{+\pi/8}$.

(iii) Si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -1 + c\,e^{\pi/8}$, dunque vale 0 per $c = e^{-\pi/8}$.

L'equazione è anche a variabili separabili (lineare). Dunque possiamo scrivere (per $y \neq -1$)

$$y' = \frac{x^3}{1+(x^4+2)^2}(y+1) \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{x^3}{1+(x^4+2)^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log|y+1| = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4+2) + k \Rightarrow |y+1| = e^k e^{1/4\operatorname{arctg}(x^4+2)}.$$

Un'altra soluzione è $y=-1$, come si vede direttamente dall'equazione. Dunque si conclude

$$\left.\begin{array}{l} y+1 = \pm e^k e^{1/4\operatorname{arctg}(x^4+2)} \quad (k\in\mathbb{R}) \\ y = -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow y(x) = -1 + c\,e^{1/4\operatorname{arctg}(x^4+2)}, \quad c\in\mathbb{R}.$$
