COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

23 giugno 2014

Esercizio 1 (7 punti)
Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ per i quali il campo vettoriale

$$\vec{v}(x,y,z) = (-\alpha x z^2, z^3, \beta z^2 y - 2zx^2)$$

è conservativo. Per tali valori di α e β si calcoli poi l'integrale curvilineo $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$, essendo $\vec{\gamma}(\theta) = (1, 2\cos\theta, 4\sin\theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Risultati: $\alpha = 2$, $\beta = 3$. | $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = 24$.

Calcoli:

Condizione necessaria è che valga $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$, $\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x}$, $\frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y}$.
Si ha

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = -2\alpha x z, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = -4zx \Rightarrow \alpha = 2;$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = 3z^2, \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} = \beta z^2 \Rightarrow \beta = 3.$$

Siccome il campo vettoriale è definito in $\mathbb{R}^3$, che è un insieme semplicemente connesso, il campo è conservativo per $\alpha = 2$, $\beta = 3$.
Per calcolare l'integrale curvilineo, è utile determinare il potenziale di $\vec{v}$: si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2xz^2 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = -x^2z^2 + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2x^2 z + \frac{\partial g}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^3 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = z^3 \Rightarrow g(y,z) = z^3 y + h(z) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = 3z^2 y + h'(z);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 3z^2 y - 2zx^2 \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = \text{cost}.$$

Il potenziale è quindi $\varphi(x,y,z) = -x^2z^2 + z^3 y + \text{cost}$, e si ha

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{\gamma}(\pi/4)) - \varphi(\vec{\gamma}(0)) = \varphi(1, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}) - \varphi(1,2,0) =$$

$$= -8 + 16\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 24.$$

Esercizio 2 (7 punti)

Si determini la natura dei punti stazionari in $\mathbf{R}^2$ della funzione $f(x,y) = x^3 - 2y^2 + xy - \frac{1}{4}x$. Si determinino quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1, \frac{1}{2})$.

Risultati: $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12}\right)$, max. rel.; $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$, sella.

max. assoluto : $7/8$, in $(1, 1/4)$
min. assoluto : $-1/12\sqrt{3}$, in $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{4\sqrt{3}}\right)$

Calcoli:

Calcoliamo il gradiente: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y - 1/4$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + x$. Imponendo $\nabla f = (0,0)$ si ha $x = 4y$, dunque

$$3 \cdot 16\, y^2 + y - 1/4 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \mp \sqrt{1+48}}{96} = \frac{-1 \mp 7}{96} = \begin{cases} -\frac{1}{12} \rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{16} \rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

I punti stazionari sono quindi $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12}\right)$ e $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

L'hessiano vale

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f\left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{12}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},\ H_f\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{16}\right) = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Nel punto $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12}\right)$ si ha $\det H_f = 7 > 0$, ed elementi negativi sulla diagonale: dunque il punto è di <u>massimo relativo</u>. Nel punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$ si ha $\det H_f = -7 < 0$; dunque il punto è di <u>sella</u>.

Nei vertici del triangolo si ha: $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 3/4$, $f(1, 1/2) = 3/4$.

Poi sui lati del triangolo otteniamo:

$\boxed{y = 0} \rightarrow f(x,0) = x^3 - \frac{1}{4}x$, la cui derivata vale $3x^2 - \frac{1}{4}$, e si annulla per $x = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$, dove si ottiene $f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{1}{24\sqrt{3}} - \frac{1}{8\sqrt{3}} = -\frac{1}{12\sqrt{3}}$.

$\boxed{x = 1} \rightarrow f(1,y) = -2y^2 + y + 3/4$, la cui derivata vale $-4y + 1$, e si annulla per $y = 1/4$, dove si ottiene $f(1, 1/4) = \frac{7}{8}$.

$\boxed{y = \frac{1}{2}x} \rightarrow f\left(x, \frac{1}{2}x\right) = x^3 - \frac{1}{4}x$, la cui derivata vale $3x^2 - \frac{1}{4}$, e si annulla per $x = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$, dove si ottiene $f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{4\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{12\sqrt{3}}$.

Nel punto stazionario interno $(1/4, 1/16)$ già sappiamo di avere un punto di sella, quindi né di massimo né di minimo. [Comunque si ha $f(1/4, 1/16) = -\frac{5}{128} > -\frac{1}{12\sqrt{3}}$.]

In conclusione, il <u>massimo assoluto</u> è $7/8$, assunto nel punto $(1, 1/4)$, e il <u>minimo assoluto</u> è $-1/12\sqrt{3}$, assunto nei punti $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{4\sqrt{3}}\right)$.

Esercizio 3 (8 punti)
Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_K xy\,dxdydz$, ove

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

Risultato: $\displaystyle\iiint_K xy\,dxdydz = \frac{203}{120}$.

Calcoli:

L'insieme K è un ottavo di sfera (di centro $(0,0,0)$ e raggio 2), troncata a quota $z=1$.

Quest'insieme si rappresenta bene per strati, al variare di z fra 0 e 1. La sezione $K_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4-z^2\}$ è un quarto di cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{4-z^2}$.

Dunque si ha

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi/2],\ \rho \in [0, \sqrt{4-z^2}]$$

$$\iiint_K xy\,dxdydz = \int_0^1 dz \iint_{K_z} xy\,dxdy = \int_0^1 dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,\underbrace{\rho}_{\text{jacobiano!}}\,d\rho =$$

$$= \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,d\theta\right) \cdot \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3\,d\rho = \frac{1}{2}\sin^2\theta\,\Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^1 (4-z^2)^2/4\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 (16-8z^2+z^4)\,dz = \frac{1}{8}\left(16-\frac{8}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{240-40+3}{120} = \frac{203}{120}.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si calcoli $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ (il flusso del campo vettoriale $\vec{F}$ attraverso la superficie S), ove

$$\vec{F} = (xy, y-z, x+z) \quad , \quad S = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,|\, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, z = x^2-y^2\}$$

(si scelga la normale orientata verso l'alto).

Risultato: $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 1.$

Calcoli:

La parametrizzazione più naturale di S è quella che la esprime come grafico: $\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2-y^2)$, $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$.

Dunque, essendo $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} = (1,0,2x)$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = (0,1,-2y)$, si ha

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = \det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & -2y\end{pmatrix} = (-2x, 2y, 1)$$

essendo >0, è un vettore diretto verso l'alto...

e quindi $\vec{n}\,dS = (-2x, 2y, 1)\,dx\,dy$.
Sulla superficie si ha $\vec{F}_{|S} = (xy, y-x^2+y^2, x+x^2-y^2)$, per cui

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\,(xy, y-x^2+y^2, x+x^2-y^2)\cdot(-2x, 2y, 1) =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^1 dy\,(-2x^2y+2y^2-2yx^2+2y^3+x+x^2-y^2) =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^1 dy\,(2y^3+y^2-4x^2y+x^2+x) =$$

$$= \int_0^1 dx\left(\frac{y^4}{2}+\frac{y^3}{3}-2x^2y^2+x^2y+xy\right)\Big|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2x^2+x^2+x\right)dx = \frac{5}{6}-\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1}+\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = 1.$$