ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	25 luglio 2019

1. (6 punti) Si determinino gli eventuali punti e valori di massimo assoluto, minimo assoluto, massimo relativo, minimo relativo della funzione

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+2x+2} & \text{se } x \geq -1 \\ \dfrac{2+x}{x^2-1} & \text{se } x < -1\,. \end{cases}$$

Si disegni quindi il grafico qualitativo di $F(x)$ (in particolare, i limiti nel punto -1 e all'infinito, la continuità/ discontinuità, la crescenza/decrescenza; non è richiesta la convessità/concavità).

Si ha $x^2+2x+2 = (x^2+2x+1)+1 = (x+1)^2+1 \geq 1$, quindi il denominatore x^2+2x+2 non si annulla mai. Poi $x^2-1=0$ per $x=1$ e $x=-1$, dunque non si annulla mai se $x<-1$. In conclusione, la funzione F è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si ha [dalla parte positiva...] [dalla parte negativa...]

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+2x+2} = 0^+; \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+x}{x^2-1} = 0^-;$$

$$\lim_{x\to-1^+} F(x) = F(-1) = -1; \quad \lim_{x\to-1^-} F(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{2+x}{x^2-1} = +\infty.$$

Non ci sono dunque massimi assoluti; c'è una discontinuità in $x=-1$.

Si ha $F(0)=0$, $F(-2)=0$, $F(x)>0$ per $x>0$.

Calcoliamo $F'(x)$:

$x>-1$: $F'(x) = \dfrac{x^2+\cancel{2x}+2 - x(2x+\cancel{2})}{(x^2+2x+2)^2} = \dfrac{-x^2+2}{(x^2+2x+2)^2} > 0$ per $x^2<2$, cioè $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, che, tenendo conto della condizione $x>-1$, diventa $-1<x<\sqrt{2}$.

Quindi F cresce per $-1<x<\sqrt{2}$, decresce per $x>\sqrt{2}$: $\sqrt{2}$ è punto di max. rel.

$x<-1$: $F'(x) = \dfrac{x^2-1-(2+x)2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$. Le radici del numeratore sono

$x^2+4x+1=0 \to x = -2 \mp\sqrt{4-1} = -2\mp\sqrt{3}$, e quindi F cresce per $-2-\sqrt{3}<x<-1$ (si noti che $-1<-2+\sqrt{3}$, dato che $\sqrt{3}>1$...) e decresce per $x<-2-\sqrt{3}$.

Quindi $-2-\sqrt{3}$ è punto di minimo relativo. Inoltre ($\lim_{x\to-1^-} F(x)=+\infty$, $F(-1)=-1$, F cresce per $-1<x<\sqrt{2}$...) il punto -1 è punto di minimo relativo.

Vediamo i valori: $F(-2-\sqrt{3}) = \dfrac{2-2-\sqrt{3}}{(-2-\sqrt{3})^2-1} = \dfrac{-\sqrt{3}}{4+4\sqrt{3}+3-1} = -\dfrac{1}{\frac{6}{\sqrt{3}}+4} = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}+4}$; $F(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}+2} = \dfrac{1}{4/\sqrt{2}+2} = \dfrac{1}{2+2\sqrt{2}}$.

Siccome $-\dfrac{1}{2\sqrt{3}+4} > -1$, il punto -1 è punto di minimo assoluto.

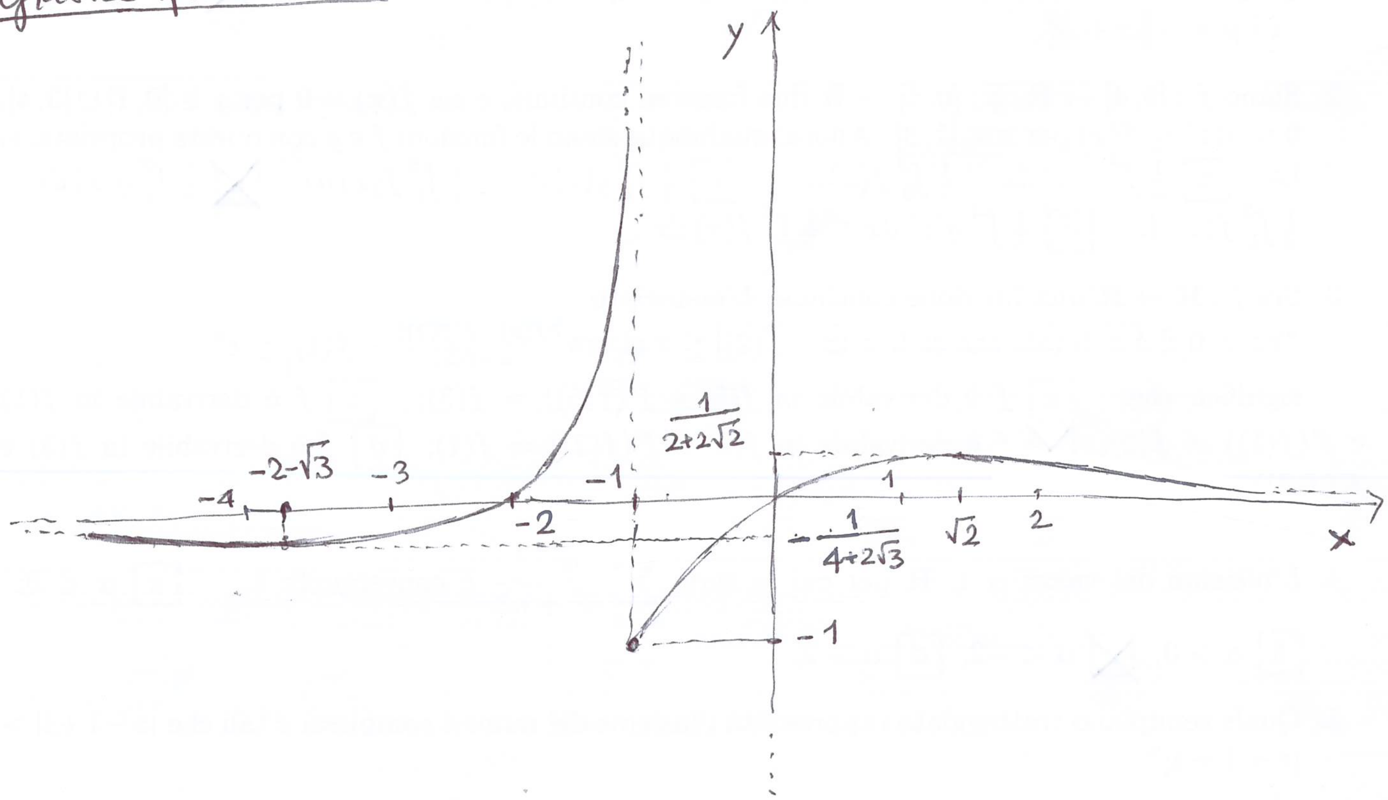
ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	25 luglio 2019

1. (6 punti) Si determinino gli eventuali punti e valori di massimo assoluto, minimo assoluto, massimo relativo, minimo relativo della funzione

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+2x+2} & \text{se } x \geq -1 \\ \dfrac{2+x}{x^2-1} & \text{se } x < -1 \,. \end{cases}$$

Si disegni quindi il grafico qualitativo di $F(x)$ (in particolare, i limiti nel punto -1 e all'infinito, la continuità/ discontinuità, la crescenza/decrescenza; non è richiesta la convessità/concavità).

Grafico qualitativo:



ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	25 luglio 2019

2. (6 punti) Determinare l'insieme dei valori dei parametri $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^{2\alpha} + 2\sin^2(x^\beta)}{3x^2 + 2x^3} dx$$

è convergente.

L'integrale è improprio "a $+\infty$" e "a 0".

(*) $+\infty$. Il numeratore si comporta come $3x^{2\alpha}$ (poiché $2\sin^2(x^\beta) \leq 2 \ldots$); il denominatore si comporta come $2x^3$ (x^3 diverge più rapidamente di $x^2 \ldots$). Dunque

$$\frac{3x^{2\alpha} + 2\sin^2(x^\beta)}{3x^2+2x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x^{2\alpha}}{2x^3} = \frac{3}{2}\frac{1}{x^{3-2\alpha}},$$

e per la convergenza si deve avere $3-2\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$.

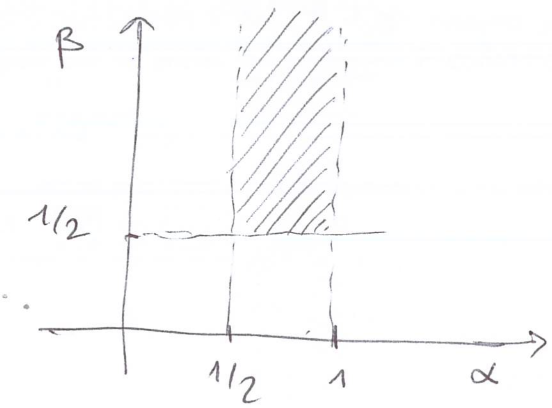
(*) 0. Il numeratore si comporta come $3x^{2\alpha} + 2x^{2\beta}$ (poiché $\sin w \sim w$ per $w \to 0 \ldots$). Dunque si comporta come $3x^{2\alpha}$ se $\alpha < \beta$; come $5x^{2\alpha}$ se $\alpha = \beta$; come $2x^{2\beta}$ se $\alpha > \beta$. Il denominatore si comporta come $3x^2$ ($2x^3$ è più piccolo di $3x^2$ per $x \to 0 \ldots$).

Dunque

$$\frac{3x^{2\alpha} + 2\sin^2(x^\beta)}{3x^2+2x^3} \sim \begin{cases} (\alpha<\beta) & \dfrac{3x^{2\alpha}}{3x^2} = \dfrac{1}{x^{2-2\alpha}} \\ (\alpha=\beta) & \dfrac{5x^{2\alpha}}{3x^2} = \dfrac{5}{3}\dfrac{1}{x^{2-2\alpha}} \\ (\alpha>\beta) & \dfrac{2x^{2\beta}}{3x^2} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^{2-2\beta}} \end{cases}$$

Dunque deve essere $2-2\alpha < 1$, cioè $\alpha > 1/2$ (per $\alpha \leq \beta$), e $2-2\beta < 1$, cioè $\beta > 1/2$ (per $\alpha > \beta$).

In conclusione, l'insieme richiesto è $1/2 < \alpha < 1$, $\beta > 1/2$.



ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	25 luglio 2019

3. (6 punti) (i) Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{e^x}{e^{-e^y}e^y} \\ y(-1) = 0\,. \end{cases}$$

(ii) Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{e^x}{e^{-e^y}e^y}\,y \\ y(-1) = 0\,. \end{cases}$$

(i) È un'equazione non-lineare del 1° ordine a variabili separabili.
Si ha, scrivendo $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $e^{-e^y}e^y\,dy = -e^x dx$.
Integrando

$$\int e^{-e^y}e^y\,dy = -\int e^x dx = -e^x + \text{cost}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = e^y \\ dt = e^y dy \end{array}\right.$$

$$\int e^{-t}dt = -e^{-t} = -e^{-e^y}.$$

Imponendo il dato di Cauchy $y(-1)=0$ viene

$$-e^{-e^0} = -e^{-1} + \text{cost} \Rightarrow \text{cost} = 0.$$

Dunque

$$-e^{-e^y} = -e^x \Rightarrow -e^y = x \Rightarrow e^y = -x \Rightarrow \boxed{y = \log(-x)}$$

(definita per $x<0$).

(ii) La funzione $y(x)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione $\left(0 = -\dfrac{e^x}{e^{-e^0}e^0}\cdot 0 \ldots\right)$ e del dato di Cauchy ($y(x)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, dunque anche per $x=-1\ldots$). Quindi la soluzione è

$\boxed{y(x)=0}$ (per ogni $x\in\mathbb{R}$).