COGNOME | | NOME | | Matr. | |

Analisi Matematica II (EA)

27 ottobre 2014

Esercizio 1 (7 punti)

Si determinino il versore tangente $\vec{T}(t)$, il versore normale $\vec{N}(t)$, il versore binormale $\vec{B}(t)$, la curvatura $\kappa(t)$ e la torsione $\tau(t)$ della curva $\vec{\alpha}(t) = (2t^3, t^3, t)$, $t > 0$.

Risultati: $\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+45t^4}}(6t^2, 3t^2, 1)$, $\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{1+45t^4}}(2, 1, -15t^2)$, $\vec{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0)$

$\kappa(t) = 6\sqrt{5}t/(1+45t^4)^{3/2}$, $\tau(t) = 0$.

Calcoli:

Si ha $\vec{\alpha}'(t) = (6t^2, 3t^2, 1)$, $\vec{\alpha}''(t) = (12t, 6t, 0)$, $\vec{\alpha}'''(t) = (12, 6, 0)$ e dunque $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{1+45t^4}$, per cui

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+45t^4}}(6t^2, 3t^2, 1).$$

Poi

$$\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6t^2 & 3t^2 & 1 \\ 12t & 6t & 0 \end{pmatrix} = (-6t, 12t, 0) = 6t(-1, 2, 0),$$

quindi $\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| = 6\sqrt{5}t$ e $\vec{B}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0)$.

Quindi

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 6t^2 & 3t^2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+45t^4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{1+45t^4}}(2, 1, -15t^2).$$

Infine,

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3} = \frac{6\sqrt{5}t}{(1+45t^4)^{3/2}}, \quad \tau(t) = \frac{(\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)) \cdot \vec{\alpha}'''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|^2} =$$

$$= \frac{(-6t, 12t, 0) \cdot (12, 6, 0)}{180t^2} =$$

$$= \frac{1}{180t^2}(-72t + 72t) = 0.$$

Esercizio 2 (7 punti)

Sia $\vec{v}(x,y,z) = (1-x, z, 1+y)$, e siano $\mathcal{C}$ la semicirconferenza di centro $(0,0,0)$ e raggio 1, contenuta nel semipiano $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y \leq 0, z = 0\}$, ed $\mathcal{S}$ il segmento congiungente $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$. Sia $\vec{\gamma}$ la curva il cui sostegno è dato dall'unione di $\mathcal{C}$, percorsa in senso antiorario a partire da $(-1,0,0)$, e di $\mathcal{S}$. Si calcoli $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{l}$.

Risultato: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 5/2$.

Calcoli:

Una parametrizzazione della curva γ è fatta di due pezzi: per la semicirconferenza $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\theta \in [\pi, 2\pi]$; per il segmento $t[(0,0,1)-(1,0,0)] + (1,0,0)$, $t \in [0,1]$ (che semplificato dà $(1-t, 0, t)$).

Dunque si hanno le derivate $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$ e $(-1,0,1)$, per cui

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_\pi^{2\pi} (1-\cos\theta, 0, 1+\operatorname{sen}\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta +$$

$$+ \int_0^1 (t, t, 1) \cdot (-1, 0, 1)\, dt =$$

$$= \int_\pi^{2\pi} (-\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\, d\theta + \int_0^1 (-t+1)\, dt =$$

$$= \cos\theta \Big|_\pi^{2\pi} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \Big|_\pi^{2\pi} - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + 1 = 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Esercizio 3 (8 punti)
Si trovino i punti stazionari in $\mathbf{R}^3$ della funzione $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^3 + xz$, e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella.

Risultato: $(0,0,0)$, punto di sella ; $\left(-\frac{1}{24}, 0, \frac{1}{12}\right)$, punto di sella.

Calcoli:

Le derivate parziali valgono $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 6z^2 + x$, ed eguagliandole a 0 si ha $y = 0$ e

$$x = -z/2 \longrightarrow 6z^2 - \frac{z}{2} = 0 \longrightarrow z = 0 \text{ e } z = 1/12,$$

per cui i punti stazionari sono $(0,0,0)$ e $\left(-\frac{1}{24}, 0, \frac{1}{12}\right)$.

Le derivate seconde valgono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12z,$$

per cui la matrice hessiana in $(0,0,0)$ e in $\left(-\frac{1}{24}, 0, \frac{1}{12}\right)$ vale

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f\left(-\frac{1}{24}, 0, \frac{1}{12}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso, poiché c'è uno 0 sulla diagonale di una riga non tutta nulla, si ha un punto di sella.

Nel secondo caso si possono calcolare gli autovalori: infatti

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{sviluppato rispetto alla } 2^a \text{ riga...}}{=} (-2-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 1\right] = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = 0$$

per $\lambda = -2$, $\lambda = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$. Essendo due autovalori positivi e uno negativo, si ha un punto di sella.

[Ragionando con i "minori di nord-ovest", si hanno i valori 2, −4, −2. Dunque, non essendo la sequenza +, +, + non tutti gli autovalori sono positivi strettamente; non essendo la sequenza −, +, −, non tutti gli autovalori sono negativi strettamente; essendo il determinante uguale a $-2 \neq 0$, nessun autovalore è nullo. In conclusione, ci sono due autovalori di segno discorde.]

Esercizio 4 (8 punti)

(i) Si determini il piano tangente $\mathcal{P}$ al grafico della funzione $F(x,y) = \frac{y^2-x^2+3}{x^2+y^2+2}$ nel punto $(1,1,F(1,1))$.
(ii) Si fornisca una parametrizzazione della curva il cui sostegno è l'intersezione del piano $\mathcal{P}$ con la superficie laterale del cilindro (a base ellittica) $\mathcal{K} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, z \in \mathbf{R}\}$.

Risultati: $\boxed{z = -\frac{7}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{3}{2}.}$ $\boxed{\left(2\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -\frac{7}{4}\cos\theta + \frac{1}{8}\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{2}\right), \ \theta \in [0, 2\pi].}$

Calcoli:

(i) Si ha $F(1,1) = 3/4$. Poi calcoliamo il gradiente:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2x(x^2+y^2+2) - (y^2-x^2+3)2x}{(x^2+y^2+2)^2} = -2x\frac{(2y^2+5)}{(x^2+y^2+2)^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y(x^2+y^2+2) - (y^2-x^2+3)2y}{(x^2+y^2+2)^2} = 2y\frac{2x^2-1}{(x^2+y^2+2)^2},$$

e dunque $\nabla F(1,1) = \left(-\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

Il piano tangente è dato dall'equazione

$$z = \nabla F(1,1)\cdot(x-1, y-1) + \frac{3}{4} = -\frac{7}{8}x + \frac{7}{8} + \frac{1}{8}y - \frac{1}{8} + \frac{3}{4} =$$

$$= -\frac{7}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{3}{2}.$$

(ii) Una parametrizzazione dell'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ è data da $x = 2\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Dunque una parametrizzazione della curva richiesta è

$$x = 2\cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta, \quad z = -\frac{7}{\cancel{8}\,4}\cancel{2}\cos\theta + \frac{1}{8}\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{2},$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$.