COGNOME | | NOME | | Matr. | |

Analisi Matematica II (EA)

28 giugno 2011

Esercizio 1 (7 punti)

Si determini per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il campo vettoriale

$$\mathrm{v}(x,y) = ((1+x^2+y^2)^\alpha x, (1+x^2+y^2)^\alpha y), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

è conservativo. Quando possibile, se ne determini quindi un potenziale.

Risultati: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha \neq -1$: $\frac{1}{2(\alpha+1)}(1+x^2+y^2)^{\alpha+1} + \text{cost}$; $\alpha=-1$: $\frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2) + \text{cost}$.

Calcoli:

Il campo vettoriale $\vec{v}$ è definito per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, un insieme semplicemente connesso. Dunque, affinché sia conservativo, è necessario e sufficiente che $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$. Vediamo:

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \alpha(1+x^2+y^2)^{\alpha-1} 2yx \quad ; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = \alpha(1+x^2+y^2)^{\alpha-1} 2xy.$$

Sono dunque uguali per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\vec{v}$ è conservativo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Determiniamo il potenziale. Deve essere $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_2$, dunque

$$\varphi(x,y) = \int \overbrace{(1+x^2+y^2)^\alpha x}^{v_1(x,y)}\, dx \underset{x^2=t,\ 2x\,dx=dt}{=} \int (1+y^2+t)^\alpha \frac{1}{2}\, dt \underset{\alpha\neq -1}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+1}(1+y^2+t)^{\alpha+1} + c(y) =$$

$\boxed{\alpha \neq -1}$

$$= \frac{1}{2(\alpha+1)}(1+x^2+y^2)^{\alpha+1} + c(y).$$

Quindi deve essere

$$v_2(x,y) = (1+x^2+y^2)^\alpha y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)^\alpha 2y + c'(y),$$ da

cui $c'(y) = 0$ e $c(y) = \text{cost}$. Un potenziale è quindi

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2(\alpha+1)}(1+x^2+y^2)^{\alpha+1} + \text{cost}.$$

Nel caso $\boxed{\alpha = -1}$, la primitiva di $(1+y^2+t)^{-1}\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{2}\log(1+y^2+t) + \text{cost}$, e dunque si arriva a

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2) + \text{cost}.$$

Esercizio 2 (8 punti)

Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 + xy$ sulla superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\}$.

Risultato: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Massimo: } \approx 3.0177, \text{ nei punti } \left(\pm \frac{1}{\sqrt{100-70\sqrt{2}}}, \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100+70\sqrt{2}}}, 0\right) \\ \text{Minimo: } \approx -0.5178, \text{ nei punti } \left(\mp \frac{1}{\sqrt{100+70\sqrt{2}}}, \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100-70\sqrt{2}}}, 0\right).\end{array}}$

Calcoli:

Usiamo i moltiplicatori di Lagrange. [Si potrebbe anche sostituire in f il valore $z^2 = 1 - x^2 - 4y^2$, tratto dal vincolo, e quindi studiare $g(x,y) = 3x^2 - 2y^2 + (1 - x^2 - 4y^2) - xy = 2x^2 - 6y^2 - xy + 1$, nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.]

Si ha, chiamando $\phi(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 1$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 6x + y - 2\lambda x = 0 \to (6-2\lambda)x + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = -4y + x - 8\lambda y = 0 \to x - (4+8\lambda)y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2z - 2\lambda z = 0 \to 2z(1-\lambda) = 0 \; \begin{smallmatrix} z=0 \\ \lambda=1 \end{smallmatrix} \\ x^2 + 4y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 1$, dalle prime due equazioni si ha $4x + y = 0$ e $x - 12y = 0$, dunque $x = 0, y = 0$. Dalla terza segue $z = \pm 1$. Dunque due punti da considerare sono $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$, ove f vale 1.

Con $z = 0$, dalle prime due equazioni si ha $x = (4+8\lambda)y$ e dunque $(6-2\lambda)(4+8\lambda)y + y = 0$. Sviluppando

$$0 = [(6-2\lambda)(4+8\lambda)+1]y = (25 + 40\lambda - 16\lambda^2)y \; \begin{smallmatrix} y=0 \to x=0 \to z=\pm 1 \\ \lambda_1 = \frac{5(1-\sqrt{2})}{4}, \; \lambda_2 = \frac{5(1+\sqrt{2})}{4}. \end{smallmatrix}$$

Da $\lambda_1 = \frac{5(1-\sqrt{2})}{4}$ viene $x = \left(4 + 8\frac{5(1-\sqrt{2})}{4}\right)y = (14 - 10\sqrt{2})y$, che messo nella quarta equazione dà

$$1 = (14-10\sqrt{2})^2 y^2 + 4y^2 = [4(7-5\sqrt{2})^2 + 4]y^2 \to y = \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100-70\sqrt{2}}},$$

a cui corrisponde $x = \pm(14-10\sqrt{2})\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100-70\sqrt{2}}} = \mp \frac{1}{\sqrt{100+70\sqrt{2}}}$.

In modo analogo, da $\lambda_2 = \frac{5(1+\sqrt{2})}{4}$ si ottiene $y = \pm\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100+70\sqrt{2}}}$ e

$$x = \pm(14+10\sqrt{2})\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{100+70\sqrt{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{100-70\sqrt{2}}}.$$

Calcolando f nei quattro punti ottenuti si ha

$$f\left(\mp\frac{1}{\sqrt{100+70\sqrt{2}}}, \pm\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100-70\sqrt{2}}}, 0\right) = \frac{50+35\sqrt{2}}{8}(24-17\sqrt{2}) \approx -0.5178 \quad \underline{\text{MINIMO}}$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{100-70\sqrt{2}}}, \pm\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100+70\sqrt{2}}}, 0\right) = \frac{50-35\sqrt{2}}{8}(24+17\sqrt{2}) \approx 3.0177 \quad \underline{\text{MASSIMO}}.$$

Esercizio 3 (7 punti)

Data la curva $\gamma(t) = (\sin t, \cos(2t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, si determinino in ogni punto di $\gamma(t)$ il versore tangente $\mathbf{T}(t)$ e il versore normale $\mathbf{N}(t)$. Infine si calcoli l'integrale $\int_\gamma x\, ds$.

Risultati: $\boxed{\vec{T}(t) = \dfrac{(1, -4\sin t)}{\sqrt{1+16\sin^2 t}}}$ $\boxed{\vec{N}(t) = \dfrac{(-4\sin t, -1)}{\sqrt{1+16\sin^2 t}}}$ $\boxed{\dfrac{1}{48}\left(17\sqrt{17}-1\right)}$

Calcoli:

Si ha $\vec{\gamma}'(t) = (\cos t, -2\sin(2t))$, cioè $\vec{\gamma}'(t) = \cos t\,(1, -4\sin t)$ (si ricordi $\sin(2t) = 2\sin t \cos t \ldots$).

Dunque $\|\vec{\gamma}'(t)\| = |\cos t| \sqrt{1+16\sin^2 t} = \cos t \sqrt{1+16\sin^2 t}$ (poiché $t \in [0, \pi/2]$, e dunque $\cos t \geq 0 \ldots$), e così

$$\vec{T}(t) = \frac{(1, -4\sin t)}{\sqrt{1+16\sin^2 t}}.$$

Si ha

$$T_1'(t) = (1+16\sin^2 t)^{-3/2}(-1/2)\, 32\sin t \cos t$$

$$T_2'(t) = (1+16\sin^2 t)^{-1}\left[-4\cos t\sqrt{1+16\sin^2 t} + 4\sin t \frac{1}{2\sqrt{1+16\sin^2 t}} \cdot 32\sin t \cos t\right] =$$

$$= 4(1+16\sin^2 t)^{-3/2}\left[-\cos t\,(1+16\sin^2 t) + 16\sin^2 t \cos t\right] = \frac{-4\cos t}{(1+16\sin^2 t)^{3/2}},$$

dunque $\vec{T}'(t) = 4(1+16\sin^2 t)^{-3/2}\cos t\,(-4\sin t, -1)$, e

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = -\frac{(4\sin t, 1)}{\sqrt{1+16\sin^2 t}}.$$

Infine

$$\int_\gamma x\, ds = \int_0^{\pi/2} \overset{\gamma_1(t)}{\sin t}\, \|\vec{\gamma}'(t)\|\, dt = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{1+16\sin^2 t}\, dt \underset{\downarrow}{=}$$

$\tau = \sin^2 t$, $d\tau = 2\sin t \cos t\, dt$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1+16\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+16\tau)^{3/2}\cdot\frac{1}{16}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}\left(17\sqrt{17}-1\right) = \frac{1}{48}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

Esercizio 4 (8 punti)

Sia $D = D_1 \cup D_2$, ove

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 - x^2\}\ ,\ D_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 - x\}.$$

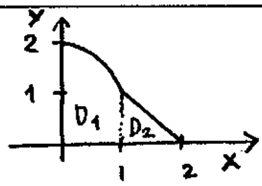
Si calcoli il volume di

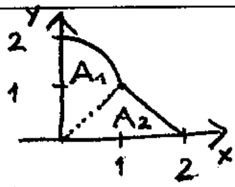
$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, (x,y) \in D, 0 \le z \le 3x + 2y + 2; 0 \le z \le 4x + y + 2\}.$$

Risultato: $164/15$.

Calcoli:

L'insieme D è dato da





I due piani $z = 3x+2y+2$ e $z = 4x+y+2$ si intersecano per $3x+2y+2 = 4x+y+2$, cioè $y = x$ (e $z = 5y+2$). Inoltre, per $y > x$ si ha $3x+2y+2 > 4x+y+2$, dunque per $y > x$ il piano più "basso" è $z = 4x+y+2$, mentre per $y < x$ il piano più "basso" è $z = 3x+2y+2$.

È quindi opportuno decomporre D in un altro modo rispetto a $D = D_1 \cup D_2$, scrivendo $D = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{(x,y) \in D \,|\, y \geq x\}$ e $A_2 = \{(x,y) \in D \,|\, y \le x\}$, e calcolare il volume come

$$\mathrm{vol}(K) = \iint_{A_1} dx\,dy \int_0^{4x+y+2} dz + \iint_{A_2} dx\,dy \int_0^{3x+2y+2} dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy\,(4x+y+2) + \int_0^1 dy \int_y^{2-y} dx\,(3x+2y+2) =$$

$$= \int_0^1 dx \left[(4x+2)(2-x^2-x) + \frac{1}{2}(2-x^2)^2 - \frac{1}{2}x^2\right] + \int_0^1 dy \left[(2y+2)(2-2y) + \frac{3}{2}(2-y)^2 - \frac{3}{2}y^2\right] =$$

$$= \int_0^1 dx \left[6 + 6x - \frac{17}{2}x^2 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^4\right] + \int_0^1 dy \left[10 - 6y - 4y^2\right] =$$

$$= \frac{79}{15} + \frac{17}{3} = \frac{164}{15}.$$