COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

28 agosto 2012

Esercizio 1 (7 punti)

Si determinino il versore tangente $\mathbf{T}(t)$, il versore normale $\mathbf{N}(t)$ e il versore binormale $\mathbf{B}(t)$ della curva $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$.

Risultato: $\boxed{\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}(1,2t,3t^2);\ \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}(-9t^3-2t, 1-9t^4, 6t^3+3t);\ \vec{B}(t) = (1+9t^2+9t^4)^{-1/2}(3t^2,-3t,1).}$

Calcoli:

Si ha $\vec{\alpha}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$, per cui

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}(1, 2t, 3t^2).$$

Poi $\vec{\alpha}''(t) = (0, 2, 6t)$, per cui

$$\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'' = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{pmatrix} = (6t^2, -6t, 2),$$

e $\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| = 2\sqrt{1+9t^2+9t^4}$.

Dunque

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}(3t^2, -3t, 1).$$

Infine

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}} \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 & -3t & 1 \\ 1 & 2t & 3t^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}} (-9t^3-2t, 1-9t^4, 6t^3+3t).$$

Esercizio 2 (7 punti)
Determinare il valore del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ per cui il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (x(x^2+y^2+1)^{-1/2}, 2\alpha y(x^2+y^2+1)^{\alpha-1}, 2\alpha z(z^2+1)^{-1/2})$$

è conservativo. Per quel valore di α calcolare quindi un potenziale di $\mathbf{v}$ e l'integrale curvilineo di $\mathbf{v}$ lungo la semicirconferenza contenuta nel piano $\{z=0\}$, di centro $(0,0,0)$ e raggio 1, e congiungente il punto iniziale $(1,0,0)$ al punto finale $(-1,0,0)$.

Risultati: $\boxed{\alpha = 1/2}$ $\boxed{\varphi(x,y,z) = (x^2+y^2+1)^{1/2} + (z^2+1)^{1/2} + c}$ $\boxed{I = 0.}$

Calcoli:

Il campo $\vec{v}$ è definito e di classe C^1 in tutto $\mathbb{R}^3$, che è un insieme semplicemente connesso. Dunque basta verificare che le derivate incrociate siano uguali. Si ha

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = 2\alpha y(\alpha-1)(x^2+y^2+1)^{\alpha-2}\,2x \quad , \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = x(-1/2)(x^2+y^2+1)^{-3/2}\,2y \,,$$

che fornisce $\alpha - 2 = -3/2$ e $2\alpha(\alpha-1) = -1/2$, cioè $\alpha = 1/2$.

Inoltre, si ha subito $\frac{\partial v_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial v_3}{\partial y}$, $\frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial v_3}{\partial x}$.

Per $\alpha = 1/2$ il campo è dunque conservativo, e vale
$\vec{v} = (x(x^2+y^2+1)^{-1/2}, y(x^2+y^2+1)^{-1/2}, z(z^2+1)^{-1/2})$.

Per trovare un potenziale $\varphi(x,y,z)$ si calcola

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{x}{(x^2+y^2+1)^{1/2}}\,dx = (x^2+y^2+1)^{1/2} + g(y,z).$$

Poi deve essere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2+1)^{1/2}} + \frac{\partial g}{\partial y} = y(x^2+y^2+1)^{-1/2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g = h(z).$$

Infine si deve avere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 + h'(z) = z(z^2+1)^{-1/2} \Rightarrow h(z) = (z^2+1)^{1/2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

In conclusione, $\varphi(x,y,z) = (x^2+y^2+1)^{1/2} + (z^2+1)^{1/2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

L'integrale curvilineo è la differenza del potenziale fra gli estremi, quindi

$$I = \varphi(-1,0,0) - \varphi(1,0,0) = \sqrt{2}+1-(\sqrt{2}+1) = 0.$$

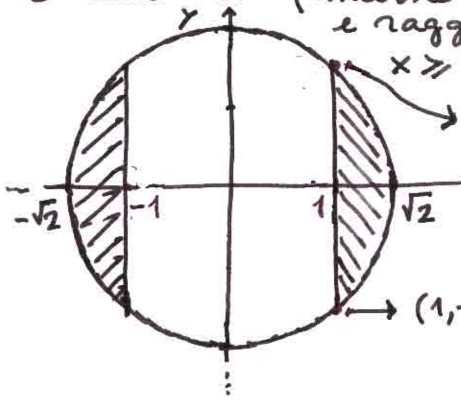
Esercizio 3 (8 punti)

Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 2\,,\ |x| \geq 1\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_A (\sin y + x^2)\,dxdy$.

Risultato: $\boxed{\displaystyle\iint_A (\sin y + x^2)\,dx\,dy = \pi/2\,.}$

Calcoli:

L'insieme A è dato da (interno del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$, intersecato con i semipiani $x \geq 1$ e $x \leq -1$):



$\to (1,1)$, corrispondente all'angolo $\pi/4$.

$\to (1,-1)$, corrispondente all'angolo $\theta = -\pi/4$

Dunque A è simmetrico rispetto alla riflessione $y \to -y$, e siccome $\sin y$ è una funzione dispari si ha $\displaystyle\iint_A \sin y\,dx\,dy = 0$.

A è simmetrico anche rispetto alla riflessione $x \to -x$, dunque basta calcolare l'integrale su $A^+ = A \cap \{x>0\}$ e raddoppiare il valore.

Quindi

[coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$\iint_A x^2\,dx\,dy = 2\iint_{A^+} x^2\,dx\,dy = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} \rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho =$$

$\to$ [per $x=1$ si ha $1 = \rho\cos\theta$, cioè $\rho = 1/\cos\theta$ ...

$$= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2\theta \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(4\cos^2\theta - \frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta =$$

la primitiva di $\cos^2\theta$ è $\dfrac{\theta + \cos\theta\sin\theta}{2}$ ...]

$$= 2\left.\frac{\theta + \cos\theta\sin\theta}{2}\right|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta\,\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(1+1) = \pi/2\,.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (xyz, x^2y^2z^2, x^3y^3z^3)$ attraverso le tre facce del cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ contenute nell'ottante $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Risultato: $\boxed{\text{Flusso} = \frac{61}{144}.}$

Calcoli:

Le tre facce del cubo sono le superfici piane

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=1, y=s, z=t, s\in[0,1], t\in[0,1]\}$$
$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=1, x=s, z=t, s\in[0,1], t\in[0,1]\}$$
$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=1, x=s, y=t, s\in[0,1], t\in[0,1]\},$$

e le tre normali uscenti unitarie sono $\vec{n}_1 = (1,0,0)$, $\vec{n}_2 = (0,1,0)$, $\vec{n}_3 = (0,0,1)$.

Dunque il flusso di $\vec{F}$ è dato da

$$\iint_{F_1\cup F_2\cup F_3} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \vec{F}(1,s,t)\cdot(1,0,0)\,ds\,dt + \iint_{[0,1]\times[0,1]} \vec{F}(s,1,t)\cdot(0,1,0)\,ds\,dt +$$

$$+ \iint_{[0,1]\times[0,1]} \vec{F}(s,t,1)\cdot(0,0,1)\,ds\,dt = \int_0^1 ds \int_0^1 dt\,[st + s^2t^2 + s^3t^3] =$$

$$= \int_0^1 s\,ds \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 s^2\,ds \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 s^3\,ds \int_0^1 t^3\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{61}{144}.$$