COGNOME ____________ NOME ____________ Matr. ______

Analisi Matematica II (EA)

29 ottobre 2012

Esercizio 1 (8 punti)

Si determinino i valori dell'intero positivo k per cui la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{2k}+y^k}{(x^2+y^2)^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$.

Risultato: $k \geq 6.$

Calcoli:

Calcoliamo $\nabla f(0,0)$: si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2k}/h^4}{h} = \lim_{h\to 0} h^{2k-5} = \begin{cases} 0 & \text{per } k\geq 3 \\ \nexists \text{ finito} & \text{per } k=1,2 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{k}/h^4}{h} = \lim_{h\to 0} h^{k-5} = \begin{cases} 0 & \text{per } k\geq 6 \\ 1 & \text{per } k=5 \\ \nexists \text{ finito} & \text{per } k=1,2,3,4 \end{cases}$$

Bisogna dunque distinguere il caso $k\geq 6$ e il caso $k=5$.

- $\underline{k\geq 6}$. Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^{2k}+y^k}{(x^2+y^2)^2} - (0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^{2k}\cos^{2k}\theta + \rho^k \operatorname{sen}^k\theta}{\rho^5} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \rho^{k-5}\left(\rho^k \cos^{2k}\theta + \operatorname{sen}^k\theta\right).$$

Siccome $|\rho^k\cos^k\theta + \operatorname{sen}^k\theta| \leq \rho^k+1$, e $\lim_{\rho\to 0^+} \rho^{k-5}(\rho^k+1) = 0$, il limite vale 0, e f è differenziabile per $k\geq 6$.

- $\underline{k=5}$. Questa volta si ha $\nabla f(0,0) = (0,1)$, dunque

$$\frac{\frac{x^{2k}+y^k}{(x^2+y^2)^2} - (0,1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{k=5}{=} \frac{x^{10}+y^5 - y(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} \underset{x=y}{=} \frac{x^{10}-3x^5}{4\sqrt{2}\,x^5} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{3}{4\sqrt{2}} \neq 0,$$

e f $\underline{\text{non}}$ è differenziabile per $k=5$.

Esercizio 2 (7 punti)

Si determinino il versore tangente $\mathrm{T}(t)$, il versore normale $\mathrm{N}(t)$ e il versore binormale $\mathrm{B}(t)$ della curva $\boldsymbol{\alpha}(t) = (2t, t^2 - 1, t^3 + 1)$, $t \in \mathrm{R}$. Si determini anche il piano osculatore della curva nel punto $(2, 0, 2)$.

Risultati: $\boxed{\vec{T}(t) = \dfrac{(2,2t,3t^2)}{\sqrt{4+4t^2+9t^4}}}$ $\boxed{\vec{N}(t) = \dfrac{(-18t^3-4t, 4-9t^4, 6t^3+12t)}{A \cdot B}}$ $\boxed{\vec{B}(t) = \dfrac{(3t^2,-6t,2)}{\sqrt{4+36t^2+9t^4}}}$ $\boxed{3x-6y+2z=10}$

$\boxed{A=\sqrt{4+4t^2+9t^4};\ B=\sqrt{4+36t^2+9t^4}}$

Calcoli:

Si ha $\vec{\alpha}'(t) = (2,2t,3t^2)$, $\vec{\alpha}''(t) = (0,2,6t)$, $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{4+4t^2+9t^4}$.

Dunque $\vec{T}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4+4t^2+9t^4}}(2,2t,3t^2)$.

Poi

$$\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'' = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{pmatrix} = (12t^2-6t^2, -12t, 4) = 2(3t^2,-6t,2),$$

e $\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| = 2\sqrt{9t^4+36t^2+4}$, quindi $\vec{B}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{9t^4+36t^2+4}}(3t^2,-6t,2)$.

Infine

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 & -6t & 2 \\ 2 & 2t & 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+4t^2+9t^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+36t^2+9t^4}} =$$

$$= (-18t^3-4t, 4-9t^4, 6t^3+12t) \cdot \frac{1}{\sqrt{4+4t^2+9t^4}\sqrt{4+36t^2+9t^4}}.$$

Il piano osculatore è ortogonale al vettore $\vec{B}(t)$. La curva $\vec{\alpha}(t)$ passa per $(2,0,2)$ per $t=1$. Dunque, essendo $\vec{B}(1) = \frac{1}{7}(3,-6,2)$, il piano osculatore è dato da

$$3(x-2) - 6(y-0) + 2(z-2) = 0,$$

cioè $3x-6y+2z-10=0$.

Esercizio 3 (7 punti)
Si determinino il piano tangente e la retta normale al grafico della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2+y^2} - \frac{y^2}{2+x^2}$$

nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.

Risultati: $8x - 8y - 9z = 0$ | $\vec{r}(t) = (8t+1, -8t+1, -9t), \ t \in \mathbb{R}$

Calcoli:

Si ha $f(1,1) = 1/3 - 1/3 = 0$. Poi $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2+y^2} - y^2(2+x^2)^{-2}(-1)2x = \frac{2x}{2+y^2} + \frac{2xy^2}{(2+x^2)^2}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(2+y^2)^{-2}(-1)2y - \frac{2y}{2+x^2} = -\frac{2x^2y}{(2+y^2)^2} - \frac{2y}{2+x^2}.$$

Dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}$.

Il piano tangente è dunque dato da

$$z - 0 = \frac{8}{9}(x-1) - \frac{8}{9}(y-1) = \frac{8}{9}x - \frac{8}{9}y,$$

cioè $8x - 8y - 9z = 0$.

La retta normale passa da $(1,1,0)$ con direzione $(8,-8,-9)$, quindi è data da

$$\vec{r}(t) = (8t+1, -8t+1, -9t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si trovino i punti stazionari in $\mathbb{R}^3$ della funzione $f(x,y,z) = zx^2 + zy + xy - y$, e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella. Si trovino anche i punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ della funzione $g(x,z)$ ottenuta calcolando f sul piano $\{x+y+z=0\}$, e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella.

Risultato: $(0,0,1) \to$ sella; $(2/3, -4/9, 1/3) \to$ sella. | $(0, 1/2) \to$ sella; $\left(\frac{3+\sqrt5}{2}, \frac{3+\sqrt5}{4}\right) \to$ sella; $\left(\frac{3-\sqrt5}{2}, \frac{3-\sqrt5}{4}\right) \to$ max. rel.

Calcoli:

Il gradiente di f vale $\nabla f(x,y,z) = (2zx + y,\ z + x - 1,\ x^2 + y)$.

Ponendolo uguale a $\vec{0}$ abbiamo $y = -x^2$, dunque $2zx - x^2 = 0$, cioè $x(2z - x) = 0$. Se $x = 0$ viene $z = 1$ e $y = 0$; se $z = x/2$ viene $x/2 + x - 1 = 0$, cioè $x = 2/3$, $y = -4/9$, $z = 1/3$.

I punti stazionari sono quindi $(0,0,1)$ e $(2/3, -4/9, 1/3)$.

La matrice hessiana vale

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z & 1 & 2x \\ 1 & 0 & 1 \\ 2x & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome c'è comunque uno 0 su una riga non tutta nulla, i due punti stazionari sono punti di sella.

La funzione $g(x,z)$ si ottiene sostituendo in f $y = -x - z$, dunque $g(x,z) = zx^2 + z(-x-z) + x(-x-z) + x + z = zx^2 - x^2 - z^2 + {}$ $-2xz + x + z$. Si ha dunque $\nabla g(x,z) = (2xz - 2x - 2z + 1,\ x^2 - 2z - 2x + 1)$.

Eguagliando a $\vec{0}$ si trova $2xz = 2x + 2z - 1 = x^2$, quindi $x = 0$ e $x = 2z$. Da $x = 0$ segue $z = 1/2$; da $x = 2z$ segue

$$4z^2 - 6z + 1 = 0, \quad \text{cioè} \quad z = \frac{3 \mp \sqrt{9-4}}{4} = \frac{3 \mp \sqrt5}{4}.$$

I punti stazionari sono quindi $(0, 1/2)$, $\left(\frac{3+\sqrt5}{2}, \frac{3+\sqrt5}{4}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt5}{2}, \frac{3-\sqrt5}{4}\right)$.

La matrice hessiana di g vale $H_g(x,z) = \begin{pmatrix} 2z-2 & 2x-2 \\ 2x-2 & -2 \end{pmatrix}$. Il determinante vale $-2 < 0$ in $(0, 1/2)$, che dunque è un punto di sella; vale $1 - \sqrt5 - (1+\sqrt5)^2 = -5 - 3\sqrt5 < 0$ in $\left(\frac{3+\sqrt5}{2}, \frac{3+\sqrt5}{4}\right)$, che dunque è un punto di sella; vale $1 + \sqrt5 - (1-\sqrt5)^2 = -5 + 3\sqrt5 > 0$ in $\left(\frac{3-\sqrt5}{2}, \frac{3-\sqrt5}{4}\right)$, e siccome sulla diagonale c'è $-2 < 0$, questo punto è di massimo relativo.