COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

29 agosto 2014

Esercizio 1 (7 punti) Si determinino il versore tangente $\vec{T}(t)$, il versore normale $\vec{N}(t)$, il versore binormale $\vec{B}(t)$, la curvatura $\kappa(t)$ e la torsione $\tau(t)$ della curva $\vec{\alpha}(t) = (1-t, 1+t^2, t)$, $t \in \mathbf{R}$. Calcolare inoltre in quali punti del sostegno della curva si ha curvatura uguale a $\frac{1}{27}$.

Risultati:

$T = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+2t^2}}(-1,2t,1)$, $N = \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}(t,1,-t)$, $B = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ $\kappa = 1/(1+2t^2)^{3/2}$, $\tau = 0$.	$\vec{\alpha}(2) = (-1,5,2)$ $\vec{\alpha}(-2) = (3,5,-2)$

Calcoli:

Si ha $\vec{\alpha}'(t) = (-1, 2t, 1)$, $\vec{\alpha}''(t) = (0,2,0)$, $\vec{\alpha}'''(t) = (0,0,0)$.

Dunque, essendo $\tau = \dfrac{(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'')\cdot \vec{\alpha}'''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|^2}$, si ha subito $\tau = 0$.

Poi $\vec{T} = \vec{\alpha}'/\|\vec{\alpha}'\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}(-1,2t,1)$, e

$$\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'' = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2t & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (-2,0,-2) \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1).$$

Infine

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2t^2}} \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2t & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{1+2t^2}}(2t, 2, -2t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}(t,1,-t).$$

La curvatura κ vale

$$\kappa = \frac{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\,(1+2t^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+2t^2)^{3/2}}.$$

Si ha $\kappa = 1/27$ per $\sqrt{1+2t^2} = 3$, cioè $2t^2 = 8$, $t = \pm 2$.

I punti cercati sono dunque $\vec{\alpha}(2) = (-1,5,2)$ e $\vec{\alpha}(-2) = (3,5,-2)$.

Esercizio 2 (7 punti) Si determini il polinomio di secondo grado $P(x) = a+bx+cx^2$ che nell'intervallo [-1,1] ha distanza minima da $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (cioè, si determinino i valori dei coefficienti a, b, c per cui $P(x) = a + bx + cx^2$ minimizza $\int_{-1}^{1}[P(x) - F(x)]^2 dx$).

Risultato: $\boxed{P(x) = -\frac{15}{4} + \frac{3}{2}\pi + \left(\frac{45}{4} - \frac{15}{4}\pi\right)x^2.}$

Calcoli:

Innanzitutto bisogna calcolare

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = 2a + \frac{2}{3}c \; ; \; \int_{-1}^{1} xP(x)\,dx = \frac{2b}{3} \; ; \; \int_{-1}^{1} x^2P(x)\,dx = \frac{2a}{3} + \frac{2c}{5} \; ;$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \; ; \quad \int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big|_{-1}^{1} = 0 \; ;$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = 2 - \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} 2a + \frac{2}{3}c = \frac{\pi}{2} & \longrightarrow a = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}c \longrightarrow \underline{a = -\frac{15}{4} + \frac{3}{2}\pi}. \\ \frac{2}{3}b = 0 & \longrightarrow \underline{b = 0} \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c = 2 - \frac{\pi}{2} & \longrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}c\right) + \frac{2}{5}c = 2 - \frac{\pi}{2} \longrightarrow \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right)c = 2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{c = \frac{45}{4} - \frac{15}{4}\pi}.$$

Il polinomio cercato è quindi

$$P(x) = -\frac{15}{4} + \frac{3}{2}\pi + \left(\frac{45}{4} - \frac{15}{4}\pi\right)x^2.$$

Esercizio 3 (8 punti) Si calcoli $\iint_Q \sin(\pi x + \pi y)\, dxdy$, ove Q è l'unione del quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ e del triangolo di vertici $(1,0)$, $(1,1)$ e $(2,\frac{1}{2})$.

Risultato: $\boxed{\iint_Q \sin(\pi x + \pi y)\,dx\,dy = -\frac{4}{3\pi^2}\,.}$

Calcoli:

La retta congiungente $(1,0)$ a $(2,1/2)$ ha equazione $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; la retta congiungente $(1,1)$ a $(2,1/2)$ ha equazione $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. L'insieme Q è un insieme y-semplice. L'integrale richiesto quindi vale:

$$\iint_Q \sin(\pi x+\pi y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \sin(\pi x+\pi y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} \sin(\pi x+\pi y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x+\pi y)\Big|_{y=0}^{y=1}\right] + \int_1^2 dx\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x+\pi y)\Big|_{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}^{y=-\frac{1}{2}x+3/2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x+\pi)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_1^2 \cos\left(\pi x-\frac{1}{2}\pi x+\frac{3}{2}\pi\right)dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_1^2 \cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)dx =$$

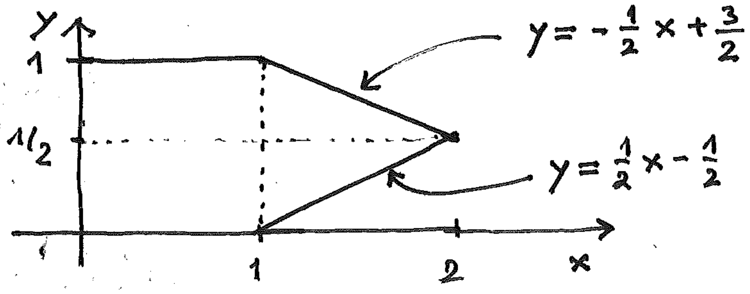
$$= -\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x+\pi)\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi^2}\sin\left(\frac{1}{2}\pi x+\frac{3}{2}\pi\right)\Big|_1^2 +$$

$$+\frac{2}{3\pi^2}\sin\left(\frac{3}{2}\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\cancel{\sin(2\pi)} + \frac{1}{\pi^2}\cancel{\sin\pi} + \frac{1}{\pi^2}\cancel{\sin\pi} - \frac{1}{\pi^2}\cancel{\sin 0} - \frac{2}{\pi^2}\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{2}{\pi^2}\cancel{\sin(2\pi)} +$$

$$+\frac{2}{3\pi^2}\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) - \frac{2}{3\pi^2}\cancel{\sin\pi} = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{4}{3\pi^2}\,.$$

Figura :



Esercizio 4 (8 punti) Si calcoli $\iiint_K xy\,dxdydz$, ove

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, 3\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 - 4(x^2+y^2)\}.$$

Risultato:

Calcoli:

L'insieme K è un solido compreso fra due grafici, quello di $3\sqrt{x^2+y^2}$ e quello di $1-4(x^2+y^2)$.

I due grafici si intersecano per

$$3\sqrt{x^2+y^2} = 1-4(x^2+y^2),$$

cioè, posto $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, per $4\rho^2+3\rho-1=0$, che dà $\rho = \frac{-3\mp\sqrt{9+16}}{8} = \frac{-3\mp 5}{8}$, quindi $\rho=-1$ (da scartare perché negativo) e $\rho = 1/4$.

Si può quindi integrare per fili con $(x,y)\in C$, la parte di cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $1/4$ contenuta nel quadrante $x\geq 0, y\geq 0$. Si ha:

$$\iiint_K xy\,dx\,dy\,dz = \iint_C dx\,dy \int_{3\sqrt{x^2+y^2}}^{1-4(x^2+y^2)} xy\,dz = \iint_C xy\left(1-4(x^2+y^2)-3\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy =$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/4} \rho^2\cos\theta\sin\theta\,(1-4\rho^2-3\rho)\,\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} \int_0^{1/4} (\rho^3-4\rho^5-3\rho^4)\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\rho^4 - \frac{4}{6}\rho^6 - \frac{3}{5}\rho^5\right)\Big|_0^{1/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^5} - \frac{2}{3\cdot 4^6} - \frac{3}{5\cdot 4^5}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 4^5}\left(1 - \frac{\cancel{2}}{3\cdot\cancel{4}2} - \frac{3}{5}\right) = \frac{7}{2\cdot 4^5\cdot 30} = \frac{7}{2^{12}\cdot 3\cdot 5} = \frac{7}{61440}.$$

Figura: K è il volume che si ottiene ruotando la figura qui riportata, all'interno del 1° ottante: