# Analisi Matematica 2

3 febbraio 2017

**Esercizio 1**

Si consideri la curva $\vec{\gamma} \subset \mathbf{R}^3$ intersezione fra la superficie di equazione $x = y^2$ ed il grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Si fornisca una parametrizzazione dell'arco di $\vec{\gamma}$ che collega il punto $(1, -1, \sqrt{2})$ con il punto $(4, 2, \sqrt{20})$.
- $\vec{\gamma}$ è regolare? Motivare la risposta.
- Si calcoli l'integrale lungo $\vec{\gamma}$ della funzione $g(x, y, z) = \sqrt{1 + x}\,(9y + 16xy)$.

**Soluzione:**

- I punti della curva appartengono ad entrambe le superfici quindi le loro coordinate $(x, y, z)$ devono soddisfare entrambe le equazioni:

$$x = y^2, \qquad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

  Scegliamo come parametro la coordinata $y$ dei punti. Abbiamo dunque $y = t$, $x = t^2$ e $z = \sqrt{t^4 + t^2}$. L'intervallo di variazione del parametro $t$ viene determinato risolvendo le equazioni $\vec{\gamma}(a) = (1, -1, \sqrt{2})$ e $\vec{\gamma}(b) = (4, 2, \sqrt{20})$, da cui $a = -1$ e $b = 2$. La parametrizzazione cercata è dunque

$$\vec{\gamma}(t) = (t^2, t, \sqrt{t^4 + t^2}), \qquad t \in [-1, 2].$$

- La curva è regolare se ammette una parametrizzazione regolare (cioè di classe $C^1$ e tale che in vettore tangente non si annulla mai). La parametrizzazione che abbiamo ottenuto al punto precedente non è regolare, infatti la terza componente di $\vec{\gamma}$, la funzione $z(t) = \sqrt{t^2 + t^4}$ non è di classe $C^1$ in quanto $z'(t) = \frac{t}{|t|} \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$ e $\lim_{t\to 0^+} z'(t) = 1$, mentre $\lim_{t\to 0^-} z'(t) = -1$. Possiamo anche dedurre che il punto di coordinate $\vec{\gamma}(0) = (0, 0, 0)$ è un punto di discontinuità del vettore tangente perché $\lim_{t\to 0^+} \vec{\gamma}'(t) = (0, 1, 1)$, mentre $\lim_{t\to 0^-} \vec{\gamma}'(t) = (0, 1, -1)$ e quandi la curva non può ammettere nessuna parametrizzazione regolare.

- Si ha $\vec{\gamma}'(t) = (2t, 1, \frac{t}{|t|} \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}})$, dunque $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1 + \frac{(1+2t^2)^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{8t^4+9t^2+2}{1+t^2}}$ e infine

$$\begin{aligned}
\int_\gamma g ds &= \int_{-1}^{2} g(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \\
&= \int_{-1}^{2} (9t + 16t^3)\sqrt{8t^4 + 9t^2 + 2} dt \\
&= \frac{1}{3}(8t^4 + 9t^2 + 2)^{3/2}|_{-1}^{2} = \frac{166}{3}\sqrt{166} - \frac{19}{3}\sqrt{19}.
\end{aligned}$$

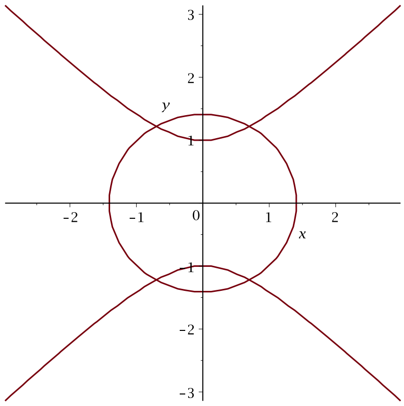
**Esercizio 2**

Si consideri l'insieme $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ definito da $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y^2 - x^2 \leq 1\}$.

- Si rappresenti graficamente $\Omega$.
- Si calcolino i punti di massimo e di minimo assoluto su $\Omega$ delle funzione $f(x, y) = x + 2y - 1$.

**Soluzione:**

- $\Omega$ è la parte del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$ compresa fra i due rami di iperbole di equazione $y^2 - x^2 = 1$ (si veda figura). Si noti che le curve $x^2 + y^2 = 2$ e $y^2 - x^2 = 1$ si intersecano in 4 punti di coordinate $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.




Le curve $x^2 + y^2 = 2$ e $y^2 - x^2 = 1$.

- L'insieme $\Omega$ è chiuso e limitato e la funzione $f$ è continua quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo assoluto su $\Omega$. Il gradiente di $f$ non si annulla mai in quanto $\nabla f = (1,2)$ quindi non abbiamo punti interni ad $\Omega$ candidati ad essere di massimo e di minimo assoluto per $f$.
Per quanto riguarda lo studio del bordo di $\Omega$, questo è composto da due archi di circonferenza e due archi di iperbole. Studiamo separatamente queste parti del bordo tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Per quanto riguarda le parti del bordo di $\Omega$ che giacciono sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 2$, utilizziamo la Lagrangiana $L(x,y,\lambda) = x + 2y - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$ e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Otteniamo $y = 2x$ (e $\lambda = \frac{1}{2x}$) e dunque le soluzioni $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ che non appartengono agli archi di circonferenza che formano parte della frontiera di $\Omega$.
Controlliamo anche il valore che la funzione $f$ assume agli estremi di questi archi, cioè nei punti $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Abbiamo

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{6} - 1 \sim 2.15$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{6} - 1 \sim 0.7$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{6} - 1 \sim -2,7$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{6} - 1 \sim -4.1.$$

Controlliamo inoltre le parti del bordo di $\Omega$ che giacciono sui rami di iperbole di equazione $y^2 - x^2 = 1$. Utilizziamo la Lagrangiana $L(x,y,\lambda) = x + 2y - 1 - \lambda(y^2 - x^2 - 1)$ e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ y^2 - x^2 = 1. \end{cases}$$

Otteniamo $y = -2x$ (e $\lambda = -\frac{1}{2x}$) e dunque le soluzioni $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ che sono accettabili in quanto appartengono agli archi di iperbole che compongono il bordo di $\Omega$. In tali punti la funzione $f$ vale:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - 4\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 = -\sqrt{3} - 1 \sim -2.7$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 4\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 = \sqrt{3} - 1 \sim -0.7.$$

Concludendo, il punto di massimo assoluto è $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ in cui la funzione vale $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{6} - 1 \sim 2.15$, mentre il punto di minimo assoluto è $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ in cui la funzione vale $-\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{6} - 1 \sim -4.1$.

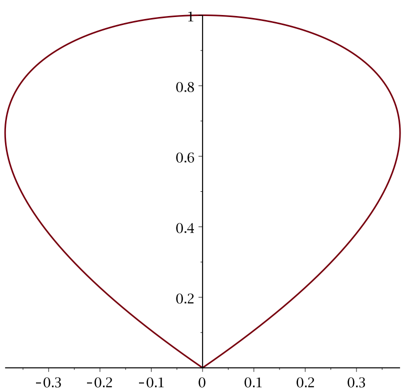
**Esercizio 3**

Si consideri la curva $\vec{\alpha}(t) = (t - t^3, 1 - t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

- Si verifichi che la curva è chiusa, e se ne disegni approssimativamente il sostegno, indicando il verso di percorrenza.
- Si calcoli l'area dell'insieme racchiuso dal sostegno di $\vec{\alpha}$.
- Qual è il versore normale $\vec{N}$ nel punto $\vec{\alpha}(0)$?

**Soluzione:**

- La curva è chiusa, infatti $\vec{\alpha}(-1) = \vec{\alpha}(1) = (0, 0)$. Il sostegno è quello illustrato in figura ed il verso di percorrenza è orario.




Il sostegno della curva $\vec{\alpha}(t) = (t - t^3, 1 - t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

- Si ha $\vec{\alpha}'(t) = (1 - 3t^2, -2t)$. Applicando Gauss–Green abbiamo (il segno $-$ essendo dovuto al fatto che $\vec{\alpha}$ è percorsa in senso opposto a quello che richiede il teorema)

$$A = -\frac{1}{2}\int_\alpha (-y, x) \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t^2 - 1, t - t^3) \cdot (1 - 3t^2, -2t) = \ldots = \frac{8}{15}.$$

[Si può anche ricavare $t$ in funzione di $y$, cioè scrivere $t = \pm\sqrt{1-y}$, e dunque avere $x = t(1-t^2) = \pm\sqrt{1-y}\,y$. Così si può calcolare l'area come (il fattore 2 dovuto alla simmetria...)

$$A = 2\int_0^1 \sqrt{1-y}\,y\,dy.$$

Ponendo $s = \sqrt{1-y}$ (da cui $y = 1-s^2$, $dy = -2sds$, $s = 1$ per $y = 0$, $s = 0$ per $y = 1$) viene

$$A = -4\int_1^0 s^2(1-s^2)\,ds = \ldots = \frac{8}{15}.]$$

- In $\vec{\alpha}(0) = (0,1)$ abbiamo $\vec{\alpha}'(0) = \vec{T}(0) = (1,0)$ e $\vec{N}(0) = (0,-1)$ (si ricordi che $\vec{N}$ deve puntare verso il centro del cerchio osculatore...).

**Esercizio 4**

Si considerino il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,y^2-x^2)$ e l'insieme $V \subset \mathbf{R}^3$ definito da

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z \leq 1-x^2-2x-2y^2, z \geq 3x^2+2x-y^2+y-\frac{7}{4}\right\}.$$

Si calcoli il flusso uscente di $\vec{F}$ attraverso il bordo di $V$ (cioè la superficie $\partial V$ che delimita $V$).

**Soluzione:** Applicando il teorema della divergenza abbiamo che il flusso uscente di $\vec{F}$ attraverso il bordo di $V$ è dato dall'integrale

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{F}\,dxdydz = 2\,\mathrm{Vol}(V)$$

(si è utilizzato che $\mathrm{div}\vec{F} = 2$). Per calcolare il volume di $V$ utilizziamo la tecnica di integrazione per fili verticali, rappresentando $V$ come l'insieme

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 3x^2+2x-y^2+y-\frac{7}{4} \leq z \leq 1-x^2-2x-2y^2, (x,y) \in E\right\},$$

dove $E \subset \mathbf{R}^2$ è l'insieme del piano definito dalla diseguaglianza $3x^2+2x-y^2+y-\frac{7}{4} \leq 1-x^2-2x-2y^2$, cioè, rielaborando con semplici conti questa espressione, l'ellisse $(x+1/2)^2+\frac{(y+1/2)^2}{4} \leq 1$. Applicando la tecnica di integrazione per fili abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \iint_E \left(\int_{3x^2+2x-y^2+y-\frac{7}{4}}^{1-x^2-2x-2y^2} 1dz\right)dxdy \\
&= \iint_E (11/4-4x^2-4x-y^2-y)dxdy \\
&= \iint_E (4-4(x+1/2)^2-(y+1/2)^2)dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4-4\rho^2)2\rho d\rho d\theta \\
&= 4\pi,
\end{aligned}$$

dove per calcolare l'integrale su $D$ abbiamo utilizzato le coordinate ellittiche $x = -1/2+\rho\cos\theta$, $y = -1/2+2\rho\sin\theta$ (per le quali il modulo del determinante della matrice jacobiana risulta $2\rho$). Applicando dunque il teorema della divergenza abbiamo

$$\iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 2\,\mathrm{Vol}(V) = 8\pi.$$