COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

4 settembre 2015

Esercizio 1 (7 punti) Sia $\widehat{P}$ la parabola data da $\{z = x^2, y = 0, 0 \leq x \leq 2\}$. Sia P la parabola ottenuta ruotando $\widehat{P}$ attorno all'asse z di un angolo $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario. Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_P \vec{v} \cdot d\vec{l}$, ove $\vec{v} = (xy, z - y, z - x)$.

Risultato: $\int_P \vec{v} \cdot d\vec{l} = 7 - \frac{4}{3\sqrt{2}}$.

Calcoli:

La superficie di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la parabola $\hat{P}$ è il paraboloide $z = x^2 + y^2$, che in coordinate cilindriche si scrive come $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = \rho^2$. Per $\theta = \pi/4$ questo dà una parametrizzazione di P, che dunque è $x = \rho/\sqrt{2}$, $y = \rho/\sqrt{2}$, $z = \rho^2$, $\rho \in [0,2]$. Derivando rispetto a ρ si ottiene $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 2\rho)$, e dunque

$$\int_P \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^2 \left(\rho^2/2,\ \rho^2 - \rho/\sqrt{2},\ \rho^2 - \rho/\sqrt{2}\right) \cdot \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 2\rho\right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \left(\rho^2/2\sqrt{2} + \rho^2/\sqrt{2} - \rho/2 + 2\rho^3 - 2\rho^2/\sqrt{2} \right) d\rho =$$

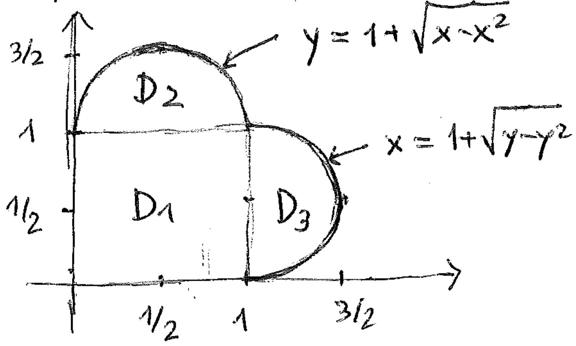
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \rho^3/3 \Big|_0^2 - \frac{1}{4}\rho^2\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\rho^4\Big|_0^2 = -\frac{4}{3\sqrt{2}} - 1 + 8 = 7 - \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2 (7 punti) Sia D_1 il quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, D_2 il semicerchio (esterno a D_1) di centro $(\frac{1}{2},1)$ e raggio $\frac{1}{2}$, D_3 il semicerchio (esterno a D_1) di centro $(1,\frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$. Sia $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Si calcoli $\iint_D (x-1)(y-1)\,dxdy$.

Risultato: $\displaystyle\iint_D (x-1)(y-1)\,dxdy = 1/6$.

Calcoli:

La semicirconferenza di centro $(1/2, 1)$ e raggio $1/2$, esterna a D_1, ha equazione $(x-1/2)^2+(y-1)^2 = 1/4$ (con $y \geq 1$), quindi $y = 1+\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2} =$ $= 1+\sqrt{x-x^2}$, $x \in [0,1]$. Analogamente, l'altra semicirconferenza ha equazione $x = 1+\sqrt{y-y^2}$, $y \in [0,1]$.



Per il calcolo dell'integrale si può quindi procedere considerando $D_1 \cup D_2$ come un insieme y-semplice, e D_3 come un insieme x-semplice.

Dunque

$$\iint_{D_1\cup D_2} (x-1)(y-1)\,dxdy = \int_0^1\left[\int_0^{1+\sqrt{x-x^2}} (x-1)(y-1)\,dy\right]dx = \int_0^1 (x-1)\left[\frac{(y-1)^2}{2}\Big|_0^{1+\sqrt{x-x^2}}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)(x-x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^3-x-x+x^2+1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (-x^3+2x^2-2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-x^2+x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{24};$$

$$\iint_{D_3} (x-1)(y-1)\,dxdy = \int_0^1\left[\int_1^{1+\sqrt{y-y^2}} (x-1)(y-1)\,dx\right]dy = \int_0^1 (y-1)\left[\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^{1+\sqrt{y-y^2}}\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y-1)(y-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2-y^3-y+y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (-y^3+2y^2-y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{y^4}{4}+\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{24}.$$

Concludendo:

$$\iint_D (x-1)(y-1)\,dxdy = \frac{5}{24}-\frac{1}{24} = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 3 (8 punti) Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sull'insieme $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2z^2 - y = 0, 0 \le x \le y, 0 \le y \le 1\}$.

Risultato: Massimo assoluto : 2 in $(1,1,0)$. Minimo assoluto : 0 in $(0,0,0)$

Calcoli:

(i) Siccome in V si ha $z^2 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$, la funzione f su V diventa $g(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$, con $0 \le x \le y$ e $0 \le y \le 1$. Queste limitazioni identificano il triangolo T di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$.

Si ha $\nabla g = (2x - 1/2, 2y + 1/2)$, che si annulla nel punto stazionario $(1/4, -1/4)$, che è fuori di T.

Vediamo allora il comportamento di g sui lati di T.

Per $x = 0$ si ha $y^2 + \frac{1}{2}y$, che è strettamente crescente in $y \in [0,1]$.

Per $y = 1$ si ha $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, la cui derivata dà $2x - 1/2$, che si annulla per $x = 1/4$.

Per $x = y$ si ha $2x^2$, che è strettamente crescente in $x \in [0,1]$.

Dobbiamo quindi confrontare i valori

$$g(0,0) = 0 \ ; \ g(0,1) = 3/2 \ ; \ g(1,1) = 2 \ ; \ g(1/4, 1) = \frac{23}{16}.$$

Il massimo è quindi 2, in $(1,1,0)$ (in V per $x=1$ e $y=1$ si ha $z=0$), e il minimo è 0, in $(0,0,0)$.

(ii) Con i moltiplicatori di Lagrange: si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - \lambda = 0 & \to x = \lambda/2 \\ 2y + \lambda = 0 & \to y = -\lambda/2 \\ 2z - 4z\lambda = 0 & \to z = 0 \xrightarrow{[4^a \text{ eq.}]} \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 0 \to \lambda = 0 \to x = 0, y = 0. \\ & \to \lambda = 1/2 \xrightarrow{[1^a \text{ e } 2^a \text{ eq.}]} x = 1/4, y = -1/4 \xrightarrow{[4^a \text{ eq.}]} 2z^2 = -1/4 - 1/4 = -1/2 \ \text{IMPOSS.} \\ x + 2z^2 - y = 0 \end{cases}$$

Dunque si è trovato il punto $(0,0,0)$, che è sul bordo di V.

Calcolando il valore di f sul bordo di V, che sono le due curve $\{y=1, x = 1-2z^2, z \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]\}$ e $\{x=0, y = 2z^2, z \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]\}$, si devono considerare le due funzioni $4z^4 - 3z^2 + 2$ e $4z^4 + z^2$, la cui derivata si annulla per $z = 0$ e $z = \pm\sqrt{3/8}$ (la prima) e $z = 0$ (la seconda). Si sono quindi individuati i punti $(1,1,0)$, $(1/4, 1, \pm\sqrt{3/8})$, $(0,0,0)$ e $(0,1,\pm\sqrt{1/2})$ (gli estremi delle due curve...), e si conclude come nel caso precedente.

Esercizio 4 (8 punti) Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_K xy^2\,dxdydz$, ove

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 - z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Risultato: $\iiint_K xy^2\,dxdydz = \frac{7}{15}\pi.$

Calcoli:

Per $z \in [0,1]$ fissato, la sezione di K è l'insieme K_z dato da

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 + z^2,$$

quindi un cerchio di centro $(1,0)$ e raggio $\sqrt{1+z^2}$.

Integrando per strati si ha:

[coordinate polari:
$x = 1 + \rho\cos\theta$
$y = \rho\sin\theta$
$\rho \in [0, \sqrt{1+z^2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$]

$$\iiint_K xy^2\,dxdydz = \int_0^1 dz \left[\iint_{K_z} xy^2\,dxdy \right] =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[(1+\rho\cos\theta)\rho^2\sin^2\theta\,\rho \right] =$$

jacobiano!

$$= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \rho\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \Bigg(\rho^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta}_{=\pi} + \rho^4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta}_{=\frac{1}{3}\sin^3\theta\big|_0^{2\pi} = 0} \Bigg) d\rho =$$

$$= \int_0^1 dz \left(\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{1+z^2}} \right) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1 + 2z^2 + z^4)\,dz =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{2}{3}z^3 \Big|_0^1 + \frac{1}{5}z^5 \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{28}{15} = \frac{7}{15}\pi.$$