| ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello | 5 settembre 2019 |
| --- | --- |

**1. (6 punti)** Si determini il polinomio di Taylor di quarto grado e di centro $x_0 = 0$ della funzione $F(x) = e^{-\sin(2x)}$.

Abbiamo gli sviluppi di Taylor

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{6} + \frac{w^4}{24} + o(w^4), \quad \text{per } w \approx 0$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4), \quad \text{per } t \approx 0.$$

Dunque, con $t = 2x$:

$$\sin(2x) = 2x - \frac{8}{6}x^3 + o(x^4), \quad [\text{e } \sin(2x) = 2x + o(x), \text{ per cui } o(\sin(2x)) = o(x) \ldots]$$

e, per $w = -\sin(2x)$:

$$e^{-\sin(2x)} = 1 - \sin(2x) + \frac{\sin^2(2x)}{2} - \frac{\sin^3(2x)}{6} + \frac{\sin^4(2x)}{24} + o(x^4) =$$

$$= 1 - \left[2x - \frac{4}{3}x^3\right] + \frac{1}{2}\left[4x^2 - \frac{16}{3}x^4\right] - \frac{1}{6}\left[8x^3\right] + \frac{1}{24}\left[16x^4\right] + o(x^4) =$$

$$= 1 - 2x + 2x^2 + \cancel{\frac{4}{3}x^3} - \cancel{\frac{4}{3}x^3} - \frac{8}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4).$$

Dunque il risultato è:

$$P_4(x) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^4.$$

| ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello | 5 settembre 2019 |
|---|---|

**2. (6 punti)** Si determinino i valori $a, b \in \mathbf{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(3x+2)^n$$

è convergente per $x \in (a,b)$ e non convergente per $x \notin (a,b)$. [Non è richiesta la verifica della convergenza in $x=a$ e in $x=b$.]

Ponendo $t = 3x+2$ ci riconduciamo alla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} t^n .$$

Calcoliamone il raggio di convergenza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)!}{\underbrace{[(n+1)!]^3}_{=[(n+1)n!]^3}} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}^{=3(n+1)(9n^2+9n+2)}}{(n+1)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{27n^2+27n+6}{n^2+2n+1} = 27.$$

Si ha quindi convergenza per $|3x+2| = |t| < \frac{1}{27}$, e non convergenza per $|3x+2| = |t| > \frac{1}{27}$. Questo significa

$$-\frac{1}{27} < 3x+2 < \frac{1}{27}$$

cioè

$$-\frac{55}{81} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{27}-2\right) < x < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}-2\right) = -\frac{53}{81}.$$

Il risultato è quindi $(a,b) = \left(-\frac{55}{81}, -\frac{53}{81}\right)$.

| ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello | 5 settembre 2019 |
|---|---|

**3. (6 punti)** (i) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 3y = 2x \\ y(1) = \alpha\,. \end{cases}$$

(ii) Si determini per quale valore di $\alpha$ la soluzione trovata ha per grafico una retta.

(i) Si tratta di un'equazione lineare del 1° ordine, non-omogenea.

La formula risolutiva ci dà:

$$y(x) = \alpha e^{-\int_1^x 3\,dt} + e^{-\int_1^x 3\,dt} \int_1^x e^{\int_1^s 3\,dt}\, 2s\,ds =$$

$$= \alpha e^{-3x+3} + e^{-3x+3} \int_1^x e^{3s-3}\, 2s\,ds =$$

$$= \alpha e^{-3x+3} + e^{-3x}\, 2\int_1^x s e^{3s}\,ds\,.$$

Si ha, integrando per parti:

$$\int_1^x s e^{3s}\,ds = \frac{1}{3}e^{3s}s\Big|_1^x - \frac{1}{3}\int_1^x e^{3s}\,ds = \frac{1}{3}e^{3x}x - \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^{3s}\Big|_1^x =$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{9}e^3.$$

Dunque

$$y(x) = \alpha e^{-3x+3} + 2e^{-3x}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^3 - \frac{1}{9}e^{3x}\right) =$$

$$= \left(\alpha - \frac{4}{9}\right)e^{-3x+3} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}.$$

(ii) La soluzione $y(x)$ ha per grafico una retta se $\alpha = 4/9$.

---

Essendo un'equazione lineare a coefficienti costanti, le soluzioni dell'omogenea sono $y_0(x) = ce^{-3x}$ (la radice di $r+3=0$ è $r=-3$...). Poi una soluzione particolare della non-omogenea si ottiene ponendo $y_*(x) = Ax+B$, da cui viene $y_*' + 3y_* = A + 3Ax + 3B = 2x$, che dà $3A=2$ e $A+3B=0$, cioè $A = 2/3$, $B = -\frac{2}{9}$.

Dunque tutte le soluzioni dell'equazione non-omogenea sono $y(x) = ce^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$, e imponendo il dato di Cauchy viene $c = \left(\alpha - \frac{4}{9}\right)e^3$.