Esercizio 1 (7 punti). Dato il campo vettoriale $\vec{v}(x,y) = (2xy + x^3y - \frac{1}{3}xy^3, x^2 - y^2)$,

(i) si determini una funzione $f(x) > 0$ in modo tale che il campo vettoriale $f\vec{v}$ sia irrotazionale, cioè abbia le derivate incrociate uguali;

(ii) si spieghi se i risultati teorici garantiscono che $f\vec{v}$ sia conservativo;

(iii) se possibile, si determini un potenziale di $f\vec{v}$.

Risposte

$$\boxed{f(x) = e^{x^2/2}}$$

$$\boxed{f\vec{v} = \nabla\phi \text{ dove } \phi(x,y) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right) + \text{const.}}$$

Soluzione. (i) Scriviamo $\vec{v} = (u, w)$. Se $f(x)$ è la funzione richiesta, si deve avere

$$0 = (fu)_y - (fw)_x = fu_y - f'w - fw_x = f(u_y - w_x) - f'w$$

da cui

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f} = \frac{u_y - w_x}{w} = \frac{2x + x^3 - xy^2 - 2x}{x^2 - y^2} = x$$

perciò $\ln f(x) = \frac{x^2}{2} + c$, e possiamo scegliere $c = 0$. Dunque $f(x) = e^{x^2/2}$ soddisfa la proprietà richiesta.

(ii) Siccome il campo $(fu, fw, 0)$ è definito su $\mathbb{R}^3$, che è un insieme semplicemente connesso, l'esistenza di un potenziale ϕ segue dalla teoria, perché $\mathbf{rot}(fu, fw, 0) = 0$.

(iii) Sia ϕ un campo scalare per cui $f\vec{v} = \nabla\phi$. Siccome $\phi_y = fw$, risulta

$$(*) \qquad \phi(x,y) = \int_0^y \phi(x,\eta)d\eta + F(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^y w(x,\eta)d\eta + F(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right) + F(x)$$

per una qualche funzione $F(x)$ da determinare. D'altra parte, dato che $\phi_x = fu$, dobbiamo avere

$$xe^{\frac{x^2}{2}}\left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right) + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot 2xy + F'(x) = \phi_x = fu = e^{\frac{x^2}{2}}\left(2xy + x^3y - \frac{xy^3}{3}\right)$$

da cui, eguagliando gli estremi, segue che $F'(x) = 0$. Perciò, usando la (*) con $F(x)$ =const, ricaviamo che

$$\phi(x,y) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right) + \text{const.}$$

□

Esercizio 2 (8 punti). Sia data la funzione $f(x,y) = y(2-x)(2y-x)$.

(i) Si determinino i suoi punti stazionari e si dica di che tipo sono;

(ii) si determininino il suo massimo assoluto e il suo minimo assoluto nell'insieme

$$B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\Big\}.$$

Risposte

$(0,0), (2,0), (2,1)$ di sella, e $(4/3, 1/3)$ di min. loc.	$\max_B f = 4$, $\min_B f = -4/27$

Soluzione. (i) Il gradiente $\nabla f = (f_x, f_y) = \Big(-2y(y-x+1), (x-4y)(x-2)\Big)$ si annulla nei punti

$$(0,0), \quad (2,0), \quad (2,1), \quad (4/3, 1/3).$$

Per vederlo bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} -2y(y-x+1) & = 0 \\ (4y-x)(2-x) & = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta se $y = 0$ o $y = x-1$. Nel primo caso, la seconda equazione implica che $x = 0$ oppure $x = 2$, e così si ottengono i primi due punti critici. Nel secondo caso, sostituendo nella seconda equazione si ricava $(2-x)(3x-4) = 0$. Dunque $x = 2$ oppure $x = 4/3$. Sostituendo questi due valori in $y = x-1$ si determinano gli ultimi due punti critici.

Nei punti critici di f individuati, la matrice hessiana

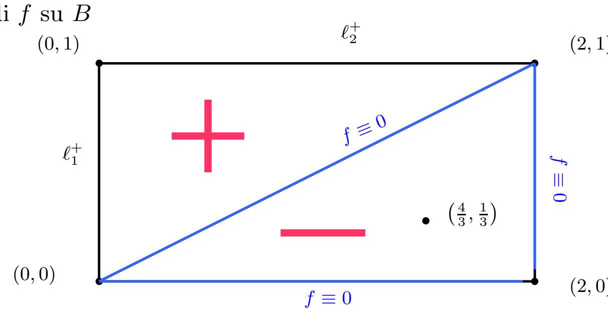
$$\begin{pmatrix} 2y & 2(x-2y-1) \\ 2(x-2y-1) & 4(2-x) \end{pmatrix}$$

vale, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che le prime quattro matrici hanno determinante strettamente negativo, sicché le corrispondenti forme quadratiche sono indefinite e i punti critici associati sono di sella. Solo nel caso dell'ultima matrice il determinante, invece, è strettamente positivo. Siccome il primo minore diagonale è $2/3 > 0$, la corrispondente forma quadratica è definita positiva[1], e il punto critico $(4/3, 1/3)$ è pertanto di minimo locale.

(ii) Dallo studio del segno di f su B



si vede che

$$\min_B f = f\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{27}.$$

Per quanto riguarda il massimo di f su B, esso sarà necessariamente raggiunto sul triangolo superiore, e non all'interno di quest'ultimo, siccome f non ha alcun punto critico in questa regione. Dato che

$$\frac{d}{dy} f(0,y) = 8y > 0, \quad \forall\, y \in \,]0,1[, \qquad \frac{d}{dx} f(x,1) = 2(x-2) < 0, \quad \forall\, x \in \,]0,2[,$$

nemmeno la restrizione di f ai lati ℓ_1^+, ℓ_2^+ ha punti critici. Pertanto

$$\max_B f = f(0,1) = 4.$$

□

[1] In alternativa, si può notare che il prodotto degli autovalori di questa matrice simmetrica (cioè il determinante, $(8-4)/9 = 4/9$) è positivo, e la loro somma (cioè la traccia della matrice, $2/3+4/3 = 2$) è anch'essa positiva. Quindi la matrice ha due autovalori strettamente positivi e la corrispondente forma quadratica è definita positiva.

Esercizio 3 (8 punti). Dato il campo vettoriale $\vec{v} = (x - z, y^2 - 1, z + x^2)$,

(i) si calcoli l'integrale della divergenza di $\vec{v}$ in
$$K = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le z \le y - x^2, 0 \le y \le 1\Big\};$$
(ii) si enunci sinteticamente il teorema della divergenza;

(iii) si verifichi la sua validità calcolando direttamente il flusso uscente di $\vec{v}$ attraverso il bordo di K.

Risposte

$$\boxed{\iiint_K \operatorname{div} \vec{v}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\,\sigma = \frac{64}{35}}$$

Soluzione. (i) Notiamo che K è la porzione di spazio contenuta nella striscia $0 \le y \le 1$ e compresa fra il piano $z = 0$ e il grafico G_f della funzione $f(x, y) = y - x^2$. Per determinare l'intersezione fra G_f ed il piano $z = 0$ imponiamo $f = 0$, il che dà la parabola di equazione $y = x^2$ disegnata in Figura 1.

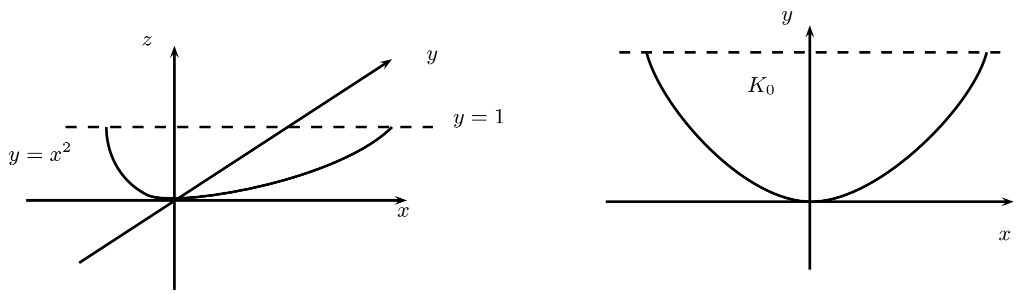


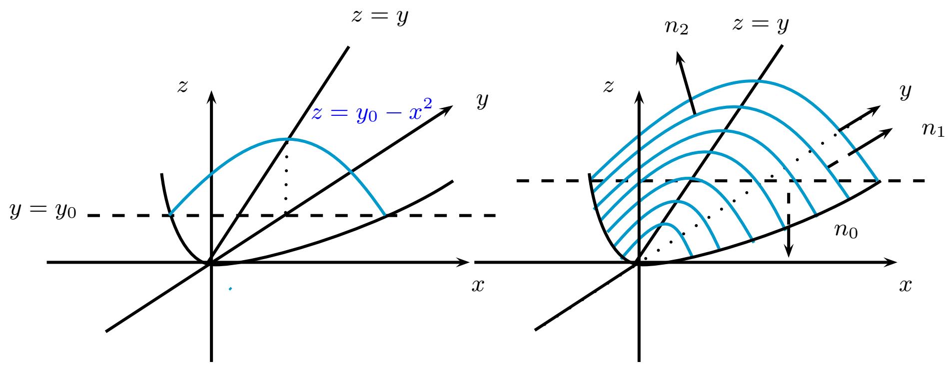
FIGURE 1. La proiezione K_0 di K su $z = 0$. Si ha $K = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in K_0, 0 \le z \le y - x^2\}$

Dato che $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x - z) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 1) + \frac{\partial}{\partial z}(z + x^2) = 2(1 + y)$ abbiamo dunque che
$$\iiint\limits_K \operatorname{div} \vec{v}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{K_0} \left(\int_0^{y - x^2} \operatorname{div} \vec{v}\, dz \right) dxdy = \iint\limits_{K_0} 2(1 + y)(y - x^2)\, dxdy.$$
Calcoliamo questo integrale doppio. Si ha
$$\begin{aligned}
2 \iint\limits_{K_0} (1 + y)(y - x^2)\, dxdy &= 2 \int_{x=-1}^{x=1} \left(\int_{y=x^2}^{y=1} \Big((1 + y)y - x^2(1 + y) \Big)\, dy \right)\, dx \\
&= 2 \left[\int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \Big|_{y=x^2}^{y=1} dx - \int_{-1}^{1} x^2 \left(y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=1} dx \right] \\
&= 2 \left[\int_{-1}^{1} \frac{1 - x^4}{2} + \frac{1 - x^6}{3}\, dx - \int_{-1}^{1} x^2 \left(1 - x^2 + \frac{1 - x^4}{2} \right) dx \right] \\
&= 2 \left[1 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{21} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right] \\
&= \frac{2}{105} \Big[105 + 21 - 10 - 35 + 15 \Big] = \frac{2}{105} \cdot 96 = \frac{64}{35}
\end{aligned}$$
e questo conclude la prima parte dell'esercizio.

(ii) Il teorema afferma, in sintesi, che
$$\iiint\limits_K \operatorname{div} \vec{v}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial K} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$
dove $\vec{n}$ indica il versore normale (uscente) sul bordo di K. L'integrale superficiale viene detto flusso (uscente) di $\vec{v}$ attraverso il bordo di K.

(iii) Facciamo vedere che anche il flusso uscente di $\vec{v}$ attraverso $\Sigma = \partial K$ vale 64/35, come previsto dalla teoria. A tal fine, conviene completare il disegno della Figura **??**. Si vede che la sezione di K con il piano verticale $y = y_0$ è la parabola verticale $z = y_0 - x^2$ il cui vertice si trova alla quota $z = y_0$.

Il bordo $\Sigma = \partial K$ di K consta di tre pezzi, precisamente $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ dove
$$\Sigma_0 = K_0, \qquad \Sigma_1 = \{(x, 1, z) \colon 0 \le z \le 1 - x^2\}, \qquad \Sigma_2 = G_f$$



Corrispondentemente, sui primi due pezzi si hanno i versori normali uscenti

$$\vec{n}_0 = (0, 0, -1), \qquad \vec{n}_1 = (0, 1, 0),$$

mentre su Σ_2, che è il grafico G_f di f, il versore normale è – a meno della scelta del segno – pari a

$$\vec{n}_2(x, y) = \pm \frac{\Big(-\nabla f(x, y), 1 \Big)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}} = \pm \frac{\Big(2x, -1, 1\Big)}{\sqrt{1 + 4x^2}}.$$

Il segno giusto è + dato che così si ottiene il versore normale uscente. Per completare l'esercizio, basta osservare che

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} = \iint\limits_{\Sigma_0} \vec{v} \cdot \vec{n}_0 + \iint\limits_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{n}_1 + \iint\limits_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{n}_2$$

e calcolare questi tre integrali, dei quali solo l'ultimo è un vero e proprio integrale superficiale (dato che i primi due sono fatti su pezzi piatti). Il secondo addendo non dà alcun contributo, cioè

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 0.$$

Questo discende dal fatto che $\vec{v} \cdot \vec{n}_1 = y^2 - 1 \equiv 0$ su Σ_1, dove $y = 1$. Riguardo al primo addendo, esso risulta pari a

$$\iint\limits_{\Sigma_0} \vec{v} \cdot \vec{n}_0 = -\iint\limits_{K_0} (0 + x^2) dxdy = -\int_{x=-1}^{x=1} x^2 \left(\int_{y=x^2}^{y=1} dy \right) dx = -\int_{-1}^{1} x^2 (1 - x^2) dx = -\frac{4}{15}.$$

Infine, siccome la superficie Σ_2 è il grafico della funzione $f(x, y) = y - x^2$, per l'elemento d'area si ha

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx\, dy$$

e su Σ_2 si ha che

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_2 = \Big(x - f(x, y), y^2 - 1, f(x, y) + x^2\Big) \cdot \frac{\Big(2x, -1, 1\Big)}{\sqrt{1 + 4x^2}} = (x - y + x^2, y^2 - 1, y) \cdot \frac{\Big(2x, -1, 1\Big)}{\sqrt{1 + 4x^2}}.$$

Quindi

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{n}_2\, d\sigma = \iint\limits_{K_0} (x - y + x^2, y^2 - 1, y) \cdot (2x, -1, 1)\, dxdy = \iint\limits_{K_0} (2x^2 - 2xy + 2x^3 - y^2 + 1 + y) dxdy$$

Nell'ultimo integrale doppio possiamo scartare gli addendi $-2xy$ e $2x^3$, che come funzioni di x sono dispari, perché il dominio di integrazione K_0 è simmetrico rispetto all'asse y (cfr. Figura 1). Resta dunque da calcolare

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \Big(2x^2 - y^2 + 1 + y\Big)\, dy\, dx &= \int_{-1}^{1} \left(2x^2(1 - x^2) - \frac{y^3}{3}\Big|_{y=x^2}^{y=1} + (1 - x^2) + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=1} \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(2x^2 - 2x^4 - \frac{1}{3} + \frac{x^6}{3} + 1 - x^2 + \frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{5x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{7}{6} \right) dx = \frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{21} + \frac{14}{6} = \frac{44}{21}.
\end{aligned}$$

Ricapitolando

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\,\Sigma = -\frac{4}{15} + \frac{44}{21} = \frac{192}{105} = \frac{64}{35},$$

in accordo col punto (i). □

Esercizio 4 (7 punti). Si effettuano 3 estrazioni senza reimmissione da un salvadanaio contenente 3 monete da 1 euro e $n-3$ monete da 2 euro. Si indichi con X_j il guadagno ricavato grazie alla $j-$esima estrazione. Determinare la probabilità che la terza moneta estratta sia da un euro, ovvero $P(X_3 = 1)$. Dire se tale probabilità coincide con $P(X_2 = 1)$. Calcolare il valor medio di $X_2 + X_3$.

Risposte

$\frac{3}{n}$	sì, le probabilità coincidono	$2 \cdot \frac{2n-3}{n}$

Soluzione. La probabilità degli eventi $\{X_2 = 1\}$, $\{X_3 = 1\}$ è la stessa che si ottiene calcolando

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{3}{n},$$

(quest'ultima uguaglianza risulta ovvia), cioè la stessa che si avrebbe nel caso con reimmissione. Infatti quando si suppone $X_j = 1$ non si impone nulla riguardo alle estrazioni precedenti, purché $j \leq 3$.

Si può calcolare la probabilità dell'evento $\{X_2 = 1\}$ anche nel seguente modo. Tale evento si verifica quando alla seconda estrazione si ottiene una delle 3 monete da un euro. Fissiamo una di queste 3 monete: la prima estrazione può dare una qualunque delle altre $n-1$. Siccome il conteggio non deve dipendere dalla scelta della particolare moneta da un euro, si moltiplica per 3. In questo momento abbiamo contato i "casi favorevoli", cioè gli eventi elementari di cui consta $\{X_2 = 1\}$. Risulta dunque

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{(n-1) \cdot 3}{n \cdot (n-1)} = \frac{3}{n}$$

dove, al denominatore, si sono contati tutti i "casi possibili". Analogamente,

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} \cdot 3 = \frac{3}{n}.$$

in particolare si ha $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = 3/n$.

Per calcolare il valor medio di $X_2 + X_3$ conviene ricordare che la media della somma è sempre la somma delle medie. Siccome

$$\mathbb{E}[X_j] = 1 \cdot \frac{3}{n} + 2 \cdot \frac{n-3}{n} = 2 \cdot \frac{2n-3}{n}.$$

per ogni $j \in \{1, 2, 3\}$, si ha dunque che

$$\mathbb{E}[X_2 + X_3] = \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 2\mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot \frac{2n-3}{n}.$$

Esistevano anche altri modi[2] di completare quest'ultima parte dell'esercizio.

$\square$

[2] *e.g.*, qualcuno si è avvalso della densità congiunta del vettore aleatorio (X_2, X_3). Nondimeno, questo procedimento, benché corretto, complicava leggermente il calcolo altrimenti molto semplice