Analisi Matematica 2

7 luglio 2017

Esercizio 1 Si consideri la curva $\vec{\gamma} \subset \mathbf{R}^3$ intersezione fra la superficie di equazione $z = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ed il piano di equazione $x + 2z = 4$.

1. Si fornisca una parametrizzazione di $\vec{\gamma}$.
2. Calcolare il versore tangente, il versore normale, il versore binormale e la curvatura nel punto di coordinate (2,0, 1).

Soluzione:

1. La curva giace sull'intersezione delle due superfici, quindi le coordinate (x, y, z) dei suoi punti dovranno soddisfare entrambe le equazioni $x + 2z = 4$ e $z = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Sostituendo nella seconda equazione la relazione $z = 2 - x/2$ otteniamo l'equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ che devono soddisfare le coordinate x, y dei punti della curva. Da tale equazione deduciamo che la proiezione di $\vec{\gamma}$ sul piano xy è un'ellisse di centro (0,0) e semiassi $a = 2$ e $b = \sqrt{3}$. Una possibile parametrizzazione per la curva $\vec{\gamma}$ è quindi la mappa $\vec{\alpha} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ data da
$$\vec{\alpha}(t) = (2\cos t, \sqrt{3}\sin t, 2 - \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$
2. Notiamo che il punto $(2, 0, 1)$ è l'immagine attraverso la mappa $\vec{\alpha}$ di $t = 0$. Si ha poi $\vec{\alpha}'(t) = (-2\sin t, \sqrt{3}\cos t, \sin t)$ e $\vec{\alpha}''(t) = (-2\cos t, -\sqrt{3}\sin t, \cos t)$. I vettori tangente, normale, binormale e la curvatura si possono ottenere tramite le formule
$$\vec{T} = \frac{\vec{\alpha}'(0)}{\|\vec{\alpha}'(0)\|} = (0, 1, 0)$$
$$\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}'(0) \wedge \vec{\alpha}''(0)}{\|\vec{\alpha}'(0) \wedge \vec{\alpha}''(0)\|} = \frac{(1, 0, 2)}{\sqrt{5}}$$
$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \frac{(-2, 0, 1)}{\sqrt{5}}$$
$$k = \frac{\|\vec{\alpha}'(0) \wedge \vec{\alpha}''(0)\|}{\|\vec{\alpha}'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Esercizio 2 Calcolare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = 2x + y + 2z$ sull'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = x^2 + y^2, 1 \le z \le 4\}$

Soluzione:

Cerchiamo tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange i punti della superficie $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = x^2 + y^2, 1 < z < 4\}$ candidati ad essere punti di massimo e minimo assoluto per f. La Lagrangiana è
$$L(x, y, z, \lambda) = 2x + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - z)$$
Risolvendo il sistema
$$\begin{cases} 2 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ 2 + \lambda = 0 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$
si ottiene $\lambda = -2$ e quindi il punto $(-1/2, -1/4, 5/16)$, che non appartiene alla superficie perché $5/16 < 1$.

Consideriamo ora le circonferenze che giacciono rispettivamente sui piani $z = 1$ e $z = 4$.
Sulla circonferenza $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ la funzione vale $f(x, y, 1) = 2x + y + 2$. Cerchiamo i punti di massimo e minimo ancora con i moltiplicatori di Lagrange, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ 1 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Si ottiene $x = \frac{1}{\lambda} = 2y$ e quindi i punti $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 1)$ e $(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 1)$ in cui f vale $f(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 1) = 2 + \sqrt{5}$ e $f(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 1) = 2 - \sqrt{5}$.
Sulla circonferenza $z = 4$, $x^2 + y^2 = 4$ la funzione vale $f(x, y, 1) = 2x + y + 8$. Cerchiamo i punti di massimo e minimo ancora con i moltiplicatori di Lagrange, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ 4 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Questa volta si ottengono i punti $(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 4)$ e $(-4/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 4)$ in cui f vale $f(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 4) = 8 + 2\sqrt{5}$ e $f(-4/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 4) = 8 - 2\sqrt{5}$.
Concludendo, il punto di massimo assoluto è $(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 4)$ in cui f vale $8 + 2\sqrt{5}$, mentre il punto di minimo assoluto è $(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 1)$ in cui f vale $2 - \sqrt{5}$.

Esercizio 3

Si consideri al curva di parametrizzazione

$$\vec{\alpha}(\theta) = ((\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta, (\cos\theta + \sin\theta)\sin\theta), \qquad \theta \in [-\pi/4, \pi/2].$$

1. Si verifichi che $\vec{\alpha}(-\pi/4) = (0, 0)$ e $\vec{\alpha}(\pi/2) = (0, 1)$.
2. Si determini l'area della figura delimitata dal sostegno di $\vec{\alpha}$ e dal segmento che congiunge i punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$.

Soluzione:

1. Sostituendo otteniamo $\vec{\alpha}(-\pi/4) = (0, 0)$ e $\vec{\alpha}(\pi/2) = (0, 1)$.
2. L'area richiesta si può calcolare utilizzando le coordinate polari nel piano, con ρ compreso fra 0 e $\cos\theta + \sin\theta$, al variare di θ fra $-\pi/4$ e $\pi/2$. Si ha quindi (chiamando A l'insieme in questione, e ricordando che il modulo del determinante della matrice jacobiana è uguale a ρ)

$$\begin{aligned} \iint_A dxdy &= \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta + \sin\theta} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/2} (\cos\theta + \sin\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/2} (1 + 2\sin\theta\cos\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \sin^2\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

   Si può anche usare il teorema di Green, per cui l'area è data dall'integrale di linea (percorso in verso antiorario)

$$\text{Area}(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ A} (-y, x) \cdot d\vec{r}.$$

   Il bordo di A comprende sia la curva $\vec{\alpha}$ che il segmento verticale da $(0, 1)$ a $(0, 0)$. Sul segmento verticale si ha $(-y, x) \cdot d\vec{r} = 0$. Sulla curva $\vec{\alpha}$ si ha

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'(\theta) &= (-2\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta, 2\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= (\cos(2\theta) - \sin(2\theta), \cos(2\theta) + \sin(2\theta)). \end{aligned}$$

quindi (svolgendo con pazienza i conti...)

$$\begin{aligned}(-y,x)\cdot d\vec{r} &= (\cos\theta+\sin\theta)[(-\sin\theta,\cos\theta)\cdot(\cos(2\theta)-\sin(2\theta),\cos(2\theta)+\sin(2\theta))]d\theta\\ &= (\cos\theta+\sin\theta)[-\sin\theta\cos(2\theta)+\sin\theta\sin(2\theta)+\cos\theta\cos(2\theta)+\cos\theta\sin(2\theta)]d\theta\\ &= (\cos\theta+\sin\theta)[(\cos\theta-\sin\theta)\cos(2\theta)+(\cos\theta+\sin\theta)\sin(2\theta)]d\theta\\ &= [(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos(2\theta)+(\cos\theta+\sin\theta)^2\sin(2\theta)]d\theta\\ &= [\cos^2(2\theta)+(1+\sin(2\theta))\sin(2\theta)]d\theta=[1+\sin(2\theta)]d\theta.\end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{1}{2}\int_\alpha(-y,x)\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/2}[1+\sin(2\theta)]d\theta$$

e si conclude come nel caso precedente.

[Che insieme è A? Il suo bordo dato dalla curva $\vec{\alpha}$ è descritto da $\rho=\cos\theta+\sin\theta$, cioè $\rho=\frac{x}{\rho}+\frac{y}{\rho}$, che dà $\rho^2=x+y$, cioè $x^2+y^2=x+y$. Questa equazione si riscrive come $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2=1/2$, la circonferenza di centro $(1/2,1/2)$ e raggio $1/\sqrt{2}$.

Dunque l'area di A è l'area di un cerchio di raggio $1/\sqrt{2}$, a cui si toglie una "lunetta" (una delle quattro che si ottengono sottraendo al cerchio in questione il quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$; questo quadrato ha area 1, dunque l'area delle quattro lunette è $\pi(1/\sqrt{2})^2-1=\pi/2-1$).

In conclusione:

$$\text{Area}(A)=\text{Area(cerchio di raggio }1/\sqrt{2})-\text{Area(lunetta)}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big)=\frac{3}{8}\pi+\frac{1}{4}.]$$

Esercizio 4 Sia $D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\colon z\geq\sqrt{9x^2+y^2}, z\leq 2-\sqrt{9x^2+y^2}\}$. Si calcoli $\iiint_D zdxdydz$.

Soluzione:

Integrando per strati abbiamo

$$\iiint_D zdxdydz=\int_0^2\Big(\iint_{D_z} zdxdy\Big)dz=\int_0^2 z\text{Area}(D_z)dz,$$

dove D_z è la sezione di D a quota z. Le due superfici $z=\sqrt{9x^2+y^2}$ e $z=2-\sqrt{9x^2+y^2}$ si intersecano per $\sqrt{9x^2+y^2}=1$, nel piano $z=1$. Dunque per $0\leq z\leq 1$ la sezione D_z è data da $\sqrt{9x^2+y^2}\leq z$, cioè $\frac{9}{z^2}x^2+\frac{1}{z^2}y^2\leq 1$, l'ellisse di semiassi $\frac{z}{3}$ e z, la cui area è $\frac{z^2}{3}$. Invece per $1\leq z\leq 2$ la sezione D_z è data da $\sqrt{9x^2+y^2}\leq 2-z$, cioè $\frac{9}{(2-z)^2}x^2+\frac{1}{(2-z)^2}y^2\leq 1$, l'ellisse di semiassi $\frac{2-z}{3}$ e $2-z$, la cui area è $\frac{(2-z)^2}{3}$.

Dunque

$$\begin{aligned}\int_0^2 z\text{Area}(D_z)dz &= \int_0^1 z\text{Area}(D_z)dz+\int_1^2 z\text{Area}(D_z)dz\\ &= \pi\int_0^1 z\frac{z^2}{3}dz+\pi\int_1^2 z\frac{(2-z)^2}{3}dz=\ldots=\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{36}=\frac{2\pi}{9}.\end{aligned}$$

Un'alternativa è di integrare per fili verticali. Già sappiamo che l'intersezione delle due superfici dà $\sqrt{9x^2+y^2}=1$, l'ellisse E di semiassi $\frac{1}{3}$ e 1. Dunque l'integrale richiesto è ($\frac{z^2}{2}$ è una primitiva di z...)

$$\iint_E\Big(\int_{\sqrt{9x^2+y^2}}^{2-\sqrt{9x^2+y^2}} zdz\Big)dxdy=\frac{1}{2}\iint_E[(2-\sqrt{9x^2+y^2})^2-(9x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_E(4-4\sqrt{9x^2+y^2}))dxdy.$$

Cambiando variabili con le coordinate ellittiche $x = \frac{1}{3}\rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, con $0 \le \rho \le 1$ e $0 \le \theta \le 2\pi$ (e modulo del determinante della matrice jacobiana uguale a $\frac{1}{3}\rho$...), si ottiene

$$\frac{1}{2}\iint_E (4 - 4\sqrt{9x^2 + y^2}))dxdy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 (4-4\rho)\rho d\rho\Big)d\theta = \ldots = \frac{2\pi}{9}.$$