COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica 2

7 settembre 2018

Esercizio 1. (7 punti) Determinare, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto in $\mathbf{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = 1 + \left(x^2+y^2+\frac{1}{6}\right)\log\left(x^2+y^2+\frac{1}{6}\right).$$

Determinare inoltre, se esistono, massimo assoluto e minimo assoluto di f in

$$C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le 1\}.$$

Soluzione:

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ (perche' $x^2+y^2+\frac{1}{6} > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$).

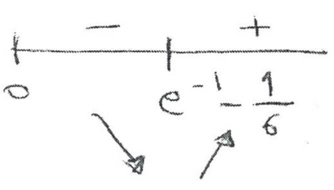
Notiamo che la funzione f ha simmetria radiale (infatti possiamo osservare che f e' di fatto funzione della variabile $z = x^2+y^2$). Sostituendo otteniamo:

$$g(z) = 1 + \left(z+\frac{1}{6}\right)\log\left(z+\frac{1}{6}\right) \quad \text{con } z \ge 0$$

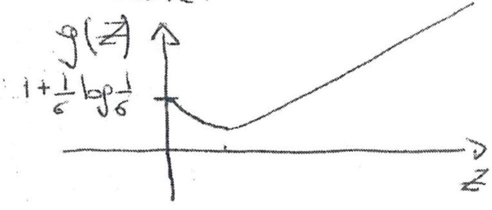
$$g'(z) = \log\left(z+\frac{1}{6}\right) + 1$$

$$g'(z) \ge 0 \iff \log\left(z+\frac{1}{6}\right) \ge -1$$

$$\iff z+\frac{1}{6} \ge e^{-1} \iff z \ge e^{-1}-\frac{1}{6} > 0$$



$z = e^{-1}-\frac{1}{6}$ punto di minimo locale.



$$g(0) = 1 + \frac{1}{6}\log\left(\frac{1}{6}\right) > 0$$

$$\lim_{z \to +\infty} g(z) = 1 + \lim_{z \to +\infty} z\log z = +\infty$$

$\Rightarrow \nexists \max_{\mathbb{R}^2} f$

$\exists \min f = 1 - e^{-1}$ raggiunto in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = e^{-1}-\frac{1}{6}\}$

Esercizio 2. (7 punti) Determinare il valore di $\beta \in \mathbf{R}$ per cui il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = \left(2x^2 + \beta y, y^2 - 4x\right)$$

è conservativo. Per tale valore di β determinare tutti i potenziali di $\vec{F}$. Calcolare inoltre, **per ogni valore di** $\beta \in \mathbf{R}$, il lavoro di $\vec{F}$ lungo la curva γ data dall'arco di circonferenza di centro $(0,0)$ e congiungente, nell'ordine, i punti $(-1,0)$ e $(0,1)$ (cioè calcolare $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$).

Soluzione:

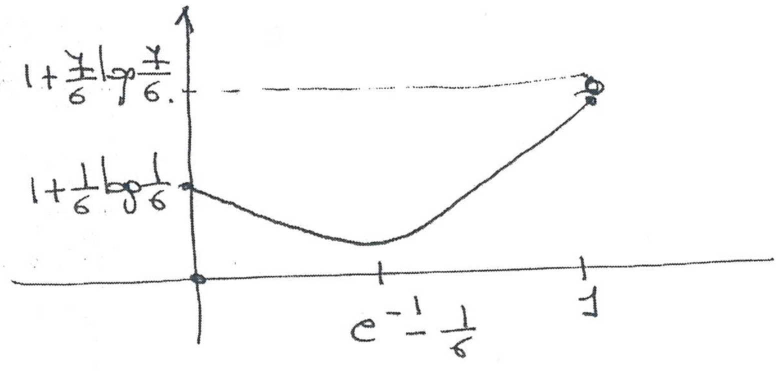
---

continuo di Esercizio 1.

Osserviamo che $z = e^{-1} - \frac{1}{6} < 1$ infatti

$\frac{1}{e} < 1 < \frac{7}{6}$.

Quindi



$g(0) = 1 + \frac{1}{6}\log\frac{1}{6} \simeq 0,70$

$g(1) = 1 + \frac{7}{6}\log\frac{7}{6} \simeq 1,18$

$\Rightarrow g(0) < g(1)$

$\Rightarrow \max_C f = 1 + \frac{7}{6}\log\frac{7}{6}$ raggiunto su ∂C

$\min f = 1 - e^{-1}$ raggiunto in $\{x^2+y^2 = e^{-1} - \frac{1}{6}\}$.

Esercizio 2. (7 punti) Determinare il valore di $\beta \in \mathbf{R}$ per cui il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = \left(2x^2 + \beta y, y^2 - 4x\right)$$

è conservativo. Per tale valore di β determinare tutti i potenziali di $\vec{F}$. Calcolare inoltre, **per ogni valore di** $\beta \in \mathbf{R}$, il lavoro di $\vec{F}$ lungo la curva γ data dall'arco di circonferenza di centro $(0,0)$ e congiungente, nell'ordine, i punti $(-1,0)$ e $(0,1)$ (cioè calcolare $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$).

Soluzione:

$$\frac{d}{dy}\left(2x^2 + \beta y\right) = \frac{d}{dx}\left(y^2 - 4x\right)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\beta = -4}$$

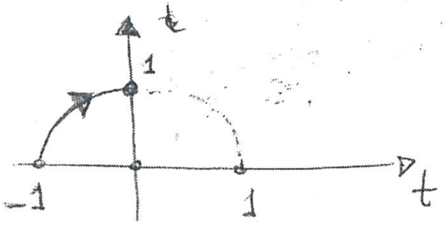
$\boxed{F \text{ e' conservativo sse per } \beta = -4.}$

$$F(x,y) = \left(2x^2 - 4y, y^2 - 4x\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x,y) = 2x^2 - 4y \Rightarrow U(x,y) = \frac{2x^3}{3} - 4xy + h(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U(x,y) = -4x + h'(y) = y^2 - 4x \Rightarrow h'(y) = y^2$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{2x^3}{3} - 4xy + \frac{y^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$



$$\gamma(t) = (-\operatorname{sen} t, -\cos t) \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt.$$

$$F(\gamma(t)) = F(-\operatorname{sen} t, -\cos t) = \left(2\operatorname{sen}^2 t - \beta \cos t, \cos^2 t + 4\operatorname{sen} t\right)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t).$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -2\operatorname{sen}^2 t \cos t + \beta \cos^2 t + \operatorname{sen} t \cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t \, dt.$$

$$= 1 + \pi + \beta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t = 1 + \pi + \beta \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{4 + 4\pi + \beta\pi}{4}}$$

Esercizio 3. (8 punti) Sia $a \in (0,1)$ e sia V_a il solido racchiuso dalle due superfici

$$S_a = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2+y^2, 0 \le z \le a\}\,,\ T_a = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 1-\frac{1-a}{a}(x^2+y^2), a \le z \le 1\}\,.$$

Si determini il valore del parametro a per cui il volume di V_a è uguale al volume di un cono di altezza 1 e avente per base un ellisse di semiassi 1 e 2.

Soluzione:

Nel piano $\{z=a\}$ la superficie S_a è la circonferenza $x^2+y^2=a$ di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{a}$, mentre la superficie T_a è data da $a = 1-\frac{1-a}{a}(x^2+y^2)$, cioè $\frac{1-a}{a}(x^2+y^2) = 1-a$, ossia $x^2+y^2=a$, la stessa circonferenza di prima.

Dunque possiamo calcolare il volume per fili verticali, con base il cerchio $x^2+y^2 \le a$.

$$V_a = \iint_{\{x^2+y^2\le a\}} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{1-\frac{1-a}{a}(x^2+y^2)} dz = \iint_{\{x^2+y^2\le a\}} \left[1-\frac{1-a}{a}(x^2+y^2)-(x^2+y^2)\right] dx\,dy \stackrel{\begin{subarray}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \theta\in[0,2\pi] \\ \rho\in[0,\sqrt{a}] \end{subarray}}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a}} \rho\left(1-\frac{1-a}{a}\rho^2-\rho^2\right)d\rho = 2\pi\int_0^{\sqrt{a}}\left(\rho-\frac{1}{a}\rho^3\right)d\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{1}{4a}\rho^4\right)\Big|_0^{\sqrt{a}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4a}a^2\right) = \frac{\pi a}{2}.$$

Il volume di un cono è dato da area di base $*$ altezza $* \frac{1}{3}$, dunque nel nostro caso è $\underbrace{\pi\cdot 1\cdot 2}_{\text{area dell'ellisse}} * 1 * \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$, e di conseguenza si ha:

$$\frac{\pi a}{2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a = 4/3.$$

L'integrale può anche essere calcolato per strati: per $0 \le z \le a$ le sezioni sono cerchi $x^2+y^2 \le z$, quindi di raggio $\sqrt{z}$; per $a \le z \le 1$ sono cerchi $z \le 1-\frac{1-a}{a}(x^2+y^2)$, cioè $x^2+y^2 \le \frac{a}{1-a}(1-z)$.

Si ha quindi

$$V_a = \int_0^a dz\,\underbrace{(\pi z)}_{\text{area sezione}} + \int_a^1 dz\,\underbrace{\left(\pi\frac{a}{1-a}(1-z)\right)}_{\text{area sezione}} = \pi\frac{z^2}{2}\Big|_0^a - \pi\frac{a}{1-a}\frac{(1-z)^2}{2}\Big|_a^1 =$$

$$= \pi\frac{a^2}{2} + \pi\frac{a}{1-a}\frac{(1-a)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(a^2+a-a^2\right) = \frac{\pi a}{2}.$$

Esercizio 4. (8 punti) Si calcoli il flusso $\iint_T \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$ del campo vettoriale $\vec{v}(x,y,z) = (2x,y,z)$ attraverso il triangolo piano T di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ (scegliendo la normale che punti verso l'alto).

Soluzione:

Il piano passante per $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ ha equazione $x+y+z-1=0$ (basta imporre il passaggio per i punti al generico piano $ax+by+cz+d=0$ per trovare $a=b=c=-d$, e scegliendo $d=-1$ si ha $x+y+z-1=0$; oppure considerare i due vettori $\vec{v}=(1,0,-1)$, che congiunge $(0,0,1)$ a $(1,0,0)$, e $\vec{w}=(0,1,-1)$, che congiunge $(0,0,1)$ a $(0,1,0)$, e che giacciono sul piano richiesto, considerare $\vec{v}\times\vec{w}=(1,1,1)$, e prendere il piano ortogonale a $(1,1,1)$ e passante per $(0,0,1)$).

Dunque è il grafico di $f(x,y)=1-x-y$, e quindi il vettore normale (che punta verso l'alto) è dato da $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (1,1,1)$. L'insieme degli (x,y) è il triangolo D di vertici $(0,0), (1,0), (0,1)$, che può essere descritto come $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$.

Il flusso richiesto è dunque:

$$\iint_T \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D (2x,y,1-x-y)\cdot(1,1,1)\,dx\,dy = \iint_D (2x+y+1-x-y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+1)\,dy = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Si può usare il teorema della divergenza, nel tetraedro Q di vertici $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$, di cui T è il pezzo di bordo che non sta nei piani $\{x=0\}, \{y=0\}$ e $\{z=0\}$.

Sui tre triangoli di bordo che stanno in questi piani (siano A, B e D, rispettivamente) si ha:

$$\vec{v}_{|A} = (0,y,z), \quad \vec{v}_{|B} = (2x,0,z), \quad \vec{v}_{|D} = (2x,y,0),$$

mentre $\vec{n}_{|A} = (-1,0,0)$, $\vec{n}_{|B} = (0,-1,0)$, $\vec{n}_{|D} = (0,0,-1)$ (il segno $-$ deriva dal fatto che si deve scegliere $\vec{n}$ che punti verso l'esterno di Q).

Dunque $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$ su A, B e D. In conclusione

$$\iint_T \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q \operatorname{div}\vec{v}\,dx\,dy\,dz - \iint_A \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS - \iint_B \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS - \iint_D \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS =$$

$$= \iiint_Q (2+1+1)\,dx\,dy\,dz = 4\,\mathrm{vol}(Q) = 4\cdot\frac{1}{3}\,\text{area}\,D\cdot 1 = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

$4 \to$ [Q è un tetraedro: dunque un cono, di base D e altezza 1.]