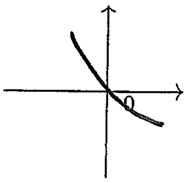
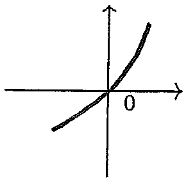
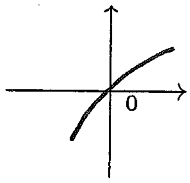
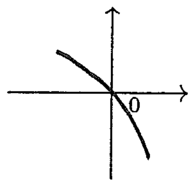
ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia		8 gennaio 2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Sia f una funzione continua strettamente positiva e sia F una sua primitiva tale che $F(0) < 0$. Indicate quale grafico rappresenta vicino a $x = 0$ la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = F(y^2 - y) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$

[X]  ; [b]  ; [c]  ; [d]  .

2. Sia $a_n > 0$ per ogni n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente, allora non è mai vero che: [a] $\frac{1}{na_n} \to 0$; [X] $n^2 a_n \to 0$; [c] a_n è decrescente; [d] $a_n \to 0$.

3. Il polinomio di Taylor di secondo grado con centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(\log(1-x))$ è: [a] $1 - 2x^2$; [X] $1 - \frac{x^2}{2}$; [c] $1 + 2x^2$; [d] $1 + \frac{x^2}{2}$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3(\log(1+x) - x)^2}{2\cos(x^2) - 2} =$ [a] $\frac{8}{9}$; [b] $\frac{1}{2}$; [X] $-\frac{3}{4}$; [d] -3.

5. Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Se $2 \le f(x) \le 4$ per ogni $x \in [a, b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 12$, allora è certamente vero che: [X] $[a, b] \ne [0, 2]$; [b] $[a, b] \ne [0, 5]$; [c] $[a, b] \ne [0, 4]$; [d] $[a, b] \ne [0, 3]$.

6. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) dx =$ [a] $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{e^2}}^{2} \frac{f(t)}{t}\,dt$; [b] $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{2}^{2e^2} \frac{f(t)}{t}\,dt$; [X] $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$; [d] $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

7. L'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{x-5}{1+x^2}\right)^n$ è convergente è: [a] $\{x \le -1\} \cup \{x \ge 1/2\}$; [b] $\{x < -1\} \cup \{x > 1/2\}$; [X] $\{x \le -3/2\} \cup \{x \ge 1\}$; [d] $\{x < -3/2\} \cup \{x > 1\}$.

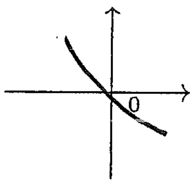
8. L'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{(x+2)x^{2\beta}}\,dx$ è convergente è: [a] $\beta > 0$; [b] $0 < \beta < 1$; [X] $0 < \beta < \frac{3}{2}$; [d] $\beta > \frac{1}{4}$.

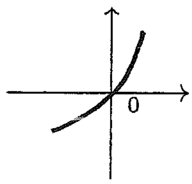
ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia		8 gennaio 2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test |Es1 |Es2 |Es3 |

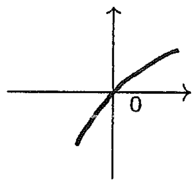
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

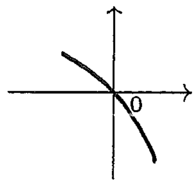
1. L'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(3x)}{x(x^\beta+1)}dx$ è convergente è: $\boxed{a}$ $0 < \beta < \frac{3}{2}$; $\boxed{b}$ $\beta > \frac{1}{4}$; $\boxed{\times}$ $\beta > 0$; $\boxed{d}$ $0 < \beta < 1$.

2. Sia f una funzione continua strettamente positiva e sia F una sua primitiva tale che $F(0) > 0$. Indicate quale grafico rappresenta vicino a $x = 0$ la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = F(y^2 - y) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{\times}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\displaystyle\int_0^1 f(2e^{-2x})\,dx =$ $\boxed{a}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$; $\boxed{\times}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{e^2}}^{2} \frac{f(t)}{t}\,dt$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_2^{2e^2} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

4. Sia $a_n > 0$ per ogni n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora non è mai vero che: $\boxed{a}$ a_n è decrescente; $\boxed{b}$ $a_n \to 0$; $\boxed{\times}$ $\frac{1}{na_n} \to 0$; $\boxed{d}$ $n^2 a_n \to 0$.

5. L'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{x-3}{1+x^2}\right)^n$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\{x \leq -3/2\} \cup \{x \geq 1\}$; $\boxed{b}$ $\{x < -3/2\} \cup \{x > 1\}$; $\boxed{\times}$ $\{x \leq -1\} \cup \{x \geq 1/2\}$; $\boxed{d}$ $\{x < -1\} \cup \{x > 1/2\}$.

6. Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Se $1 \leq f(x) \leq 2$ per ogni $x \in [a, b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 6$, allora è certamente vero che: $\boxed{a}$ $[a, b] \neq [0, 4]$; $\boxed{b}$ $[a, b] \neq [0, 3]$; $\boxed{\times}$ $[a, b] \neq [0, 2]$; $\boxed{d}$ $[a, b] \neq [0, 5]$.

7. Il polinomio di Taylor di secondo grado con centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(\sin(2x))$ è: $\boxed{a}$ $1 + 2x^2$; $\boxed{b}$ $1 + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{\times}$ $1 - 2x^2$; $\boxed{d}$ $1 - \frac{x^2}{2}$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x^2) - 2x^2}{3(\log(1+x) - x)^3} =$ $\boxed{a}$ $-\frac{3}{4}$; $\boxed{b}$ -3; $\boxed{\times}$ $\frac{8}{9}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}$.

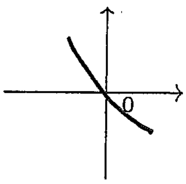
ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia		8 gennaio 2014
Cognome:	Nome:	Matricola:
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

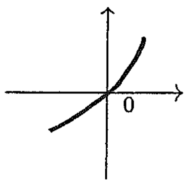
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

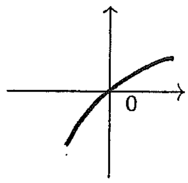
1. L'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{x-5}{1+x^2}\right)^n$ è convergente è:
 a $\{x < -1\} \cup \{x > 1/2\}$; b $\{x \leq -3/2\} \cup \{x \geq 1\}$; c $\{x < -3/2\} \cup \{x > 1\}$; d $\{x \leq -1\} \cup \{x \geq 1/2\}$.

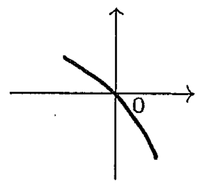
2. Sia f una funzione continua in $[a,b]$. Se $2 \leq f(x) \leq 4$ per ogni $x \in [a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 12$, allora è certamente vero che: a $[a,b] \neq [0,5]$; b $[a,b] \neq [0,4]$; c $[a,b] \neq [0,3]$; d $[a,b] \neq [0,2]$.

3. Sia f una funzione continua strettamente negativa e sia F una sua primitiva tale che $F(0) > 0$. Indicate quale grafico rappresenta vicino a $x = 0$ la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = F(y^2 - y) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

a 

; b 

; c 

; d 

.

4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\displaystyle\int_0^1 f(2e^{-2x})\,dx =$ a $\displaystyle\frac{1}{2}\int_2^{2e^2} \frac{f(t)}{t}\,dt$;
 b $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$; c $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$; d $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{e^2}}^{2} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3(\log(1+x)-x)^2}{2\cos(x^2)-2} =$ a $\frac{1}{2}$; b $-\frac{3}{4}$; c -3; d $\frac{8}{9}$.

6. L'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(3x)}{x(x^\beta+1)}dx$ è convergente è: a $0 < \beta < 1$; b $0 < \beta < \frac{3}{2}$; c $\beta > \frac{1}{4}$; d $\beta > 0$.

7. Sia $a_n > 0$ per ogni n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora non è mai vero che: a $n^2 a_n \to 0$; b a_n è decrescente; c $a_n \to 0$; d $\frac{1}{na_n} \to 0$.

8. Il polinomio di Taylor di secondo grado con centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(e^{2x} - 1)$ è:
 a $1 - \frac{x^2}{2}$; b $1 + 2x^2$; c $1 + \frac{x^2}{2}$; d $1 - 2x^2$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia		8 gennaio 2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3

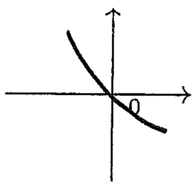
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

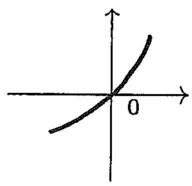
1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2(\log(1+x)-x)^3}{3\sin(x^2)-3x^2} =$ [a] $\frac{8}{9}$; [X] $\frac{1}{2}$; [c] $-\frac{3}{4}$; [d] -3.

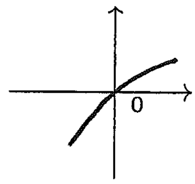
2. L'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)+2}{(x^{2\beta}+2)\sqrt{x}}dx$ è convergente è: [a] $\beta > 0$; [b] $0 < \beta < 1$; [c] $0 < \beta < \frac{3}{2}$; [X] $\beta > \frac{1}{4}$.

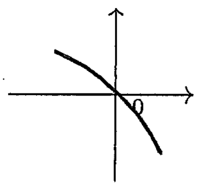
3. Sia f una funzione continua in $[a,b]$. Se $1 \le f(x) \le 2$ per ogni $x \in [a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 6$, allora è certamente vero che: [X] $[a,b] \neq [0,2]$; [b] $[a,b] \neq [0,5]$; [c] $[a,b] \neq [0,4]$; [d] $[a,b] \neq [0,3]$.

4. Sia f una funzione continua strettamente positiva e sia F una sua primitiva tale che $F(0) < 0$. Indicate quale grafico rappresenta vicino a $x = 0$ la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = F(y^2 - y) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$

[X] 

; [b] 

; [c] 

; [d] 

.

5. Il polinomio di Taylor di secondo grado con centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(\log(1-x))$ è: [a] $1 - 2x^2$; [X] $1 - \frac{x^2}{2}$; [c] $1 + 2x^2$; [d] $1 + \frac{x^2}{2}$.

6. L'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{5-x}{1+x^2}\right)^n$ è convergente è: [a] $\{x \le -1\} \cup \{x \ge 1/2\}$; [b] $\{x < -1\} \cup \{x > 1/2\}$; [c] $\{x \le -3/2\} \cup \{x \ge 1\}$; [X] $\{x < -3/2\} \cup \{x > 1\}$.

7. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{e^{-2x}}{2}\right)dx =$ [a] $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{e^2}}^{2} \frac{f(t)}{t}\,dt$; [b] $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{2}^{2e^2} \frac{f(t)}{t}\,dt$; [c] $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$; [X] $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

8. Sia $a_n > 0$ per ogni n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente, allora non è mai vero che: [a] $\frac{1}{na_n} \to 0$; [X] $n^2 a_n \to 0$; [c] a_n è decrescente; [d] $a_n \to 0$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia		8 gennaio 2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

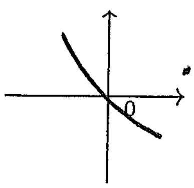
1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^1 f\left(\frac{e^{-2x}}{2}\right) dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{2}\int_2^{2e^2} \frac{f(t)}{t}\, dt$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \frac{f(t)}{t}\, dt$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\, dt$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{e^2}}^{2} \frac{f(t)}{t}\, dt$.

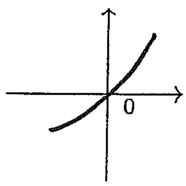
2. Il polinomio di Taylor di secondo grado con centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(e^{2x} - 1)$ è: $\boxed{a}$ $1 - \frac{x^2}{2}$; $\boxed{b}$ $1 + 2x^2$; $\boxed{c}$ $1 + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{d}$ $1 - 2x^2$.

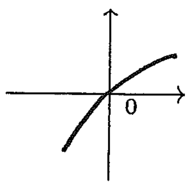
3. $\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x^2) - 3}{2(\log(1+x) - x)^2} =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $-\frac{3}{4}$; $\boxed{c}$ -3; $\boxed{d}$ $\frac{8}{9}$.

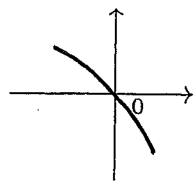
4. L'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{5-x}{1+x^2}\right)^n$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\{x < -1\} \cup \{x > 1/2\}$; $\boxed{b}$ $\{x \leq -3/2\} \cup \{x \geq 1\}$; $\boxed{c}$ $\{x < -3/2\} \cup \{x > 1\}$; $\boxed{d}$ $\{x \leq -1\} \cup \{x \geq 1/2\}$.

5. Sia f una funzione continua strettamente negativa e sia F una sua primitiva tale che $F(0) > 0$. Indicate quale grafico rappresenta vicino a $x = 0$ la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = F(y^2 - y) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. Sia $a_n > 0$ per ogni n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora non è mai vero che: $\boxed{a}$ $n^2 a_n \to 0$; $\boxed{b}$ a_n è decrescente; $\boxed{c}$ $a_n \to 0$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{n a_n} \to 0$.

7. L'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x) + 2}{(x^{2\beta} + 2)\sqrt{x}} dx$ è convergente è: $\boxed{a}$ $0 < \beta < 1$; $\boxed{b}$ $0 < \beta < \frac{3}{2}$; $\boxed{c}$ $\beta > \frac{1}{4}$; $\boxed{d}$ $\beta > 0$.

8. Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Se $2 \leq f(x) \leq 4$ per ogni $x \in [a, b]$ e $\int_a^b f(x)\, dx = 8$, allora è certamente vero che: $\boxed{a}$ $[a, b] \neq [0, 5]$; $\boxed{b}$ $[a, b] \neq [0, 4]$; $\boxed{c}$ $[a, b] \neq [0, 3]$; $\boxed{d}$ $[a, b] \neq [0, 2]$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia		8 gennaio 2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia f una funzione continua in $[a,b]$. Se $1 \leq f(x) \leq 2$ per ogni $x \in [a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 4$, allora è certamente vero che: $\boxed{a}$ $[a,b] \neq [0,3]$; $\boxed{b}$ $[a,b] \neq [0,2]$; $\boxtimes$ $[a,b] \neq [0,5]$; $\boxed{d}$ $[a,b] \neq [0,4]$.

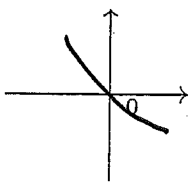
2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\displaystyle\int_0^1 f(2e^{2x})\,dx =$ $\boxed{a}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{e^2}}^{2} \frac{f(t)}{t}\,dt$; $\boxtimes$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{2}^{2e^2} \frac{f(t)}{t}\,dt$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

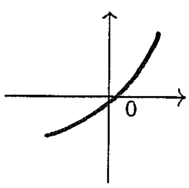
3. Sia $a_n > 0$ per ogni n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente, allora non è mai vero che: $\boxed{a}$ $a_n \to 0$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{na_n} \to 0$; $\boxtimes$ $n^2 a_n \to 0$; $\boxed{d}$ a_n è decrescente.

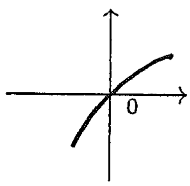
4. Il polinomio di Taylor di secondo grado con centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(1 - e^{-x})$ è: $\boxed{a}$ $1 + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{b}$ $1 - 2x^2$; $\boxtimes$ $1 - \frac{x^2}{2}$; $\boxed{d}$ $1 + 2x^2$.

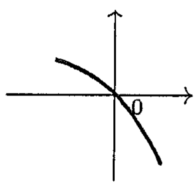
5. L'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2(2x)}{(x+1)x^\beta}\,dx$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\beta > \frac{1}{4}$; $\boxed{b}$ $\beta > 0$; $\boxtimes$ $0 < \beta < 1$; $\boxed{d}$ $0 < \beta < \frac{3}{2}$.

6. Sia f una funzione continua strettamente negativa e sia F una sua primitiva tale che $F(0) < 0$. Indicate quale grafico rappresenta vicino a $x = 0$ la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = F(y^2 - y) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxtimes$ 

.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(\log(1+x) - x)^3}{3\sin(x^2) - 3x^2} =$ $\boxed{a}$ -3; $\boxed{b}$ $\frac{8}{9}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $-\frac{3}{4}$.

8. L'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{3-x}{1+x^2}\right)^n$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\{x < -3/2\} \cup \{x > 1\}$; $\boxed{b}$ $\{x \leq -1\} \cup \{x \geq 1/2\}$; $\boxtimes$ $\{x < -1\} \cup \{x > 1/2\}$; $\boxed{d}$ $\{x \leq -3/2\} \cup \{x \geq 1\}$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia		8 gennaio 2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Il polinomio di Taylor di secondo grado con centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(\sin(2x))$ è:
$\boxed{a}$ $1 + \frac{x^2}{2}$; ☒ $1 - 2x^2$; $\boxed{c}$ $1 - \frac{x^2}{2}$; $\boxed{d}$ $1 + 2x^2$.

2. L'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \left(\frac{x-3}{1+x^2}\right)^n$ è convergente è:
$\boxed{a}$ $\{x < -3/2\} \cup \{x > 1\}$; ☒ $\{x \leq -1\} \cup \{x \geq 1/2\}$; $\boxed{c}$ $\{x < -1\} \cup \{x > 1/2\}$; $\boxed{d}$ $\{x \leq -3/2\} \cup \{x \geq 1\}$.

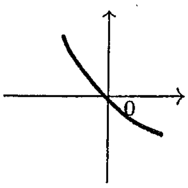
3. L'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{(x+2)x^{2\beta}} dx$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\beta > \frac{1}{4}$; $\boxed{b}$ $\beta > 0$; $\boxed{c}$ $0 < \beta < 1$; ☒ $0 < \beta < \frac{3}{2}$.

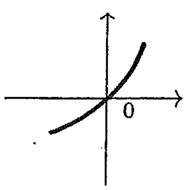
4. Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Se $1 \leq f(x) \leq 2$ per ogni $x \in [a, b]$ e $\int_a^b f(x)\, dx = 4$, allora è certamente vero che: $\boxed{a}$ $[a, b] \neq [0, 3]$; $\boxed{b}$ $[a, b] \neq [0, 2]$; ☒ $[a, b] \neq [0, 5]$; $\boxed{d}$ $[a, b] \neq [0, 4]$.

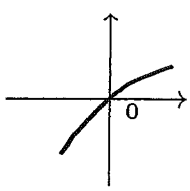
5. Sia $a_n > 0$ per ogni n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora non è mai vero che: $\boxed{a}$ $a_n \to 0$; ☒ $\frac{1}{n a_n} \to 0$; $\boxed{c}$ $n^2 a_n \to 0$; $\boxed{d}$ a_n è decrescente.

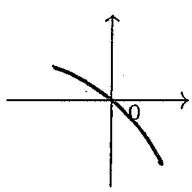
6. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2\sin(x^2) - 2x^2}{3(\log(1+x) - x)^3} =$ $\boxed{a}$ -3; ☒ $\frac{8}{9}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $-\frac{3}{4}$.

7. Sia f una funzione continua strettamente positiva e sia F una sua primitiva tale che $F(0) > 0$. Indicate quale grafico rappresenta vicino a $x = 0$ la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = F(y^2 - y) \\ y(0) = 0 \,. \end{cases}$$

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; ☒ 

; $\boxed{d}$ 

.

8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) dx =$ $\boxed{a}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\, dt$;
$\boxed{b}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{e^2}}^{2} \frac{f(t)}{t}\, dt$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{2}^{2e^2} \frac{f(t)}{t}\, dt$; ☒ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \frac{f(t)}{t}\, dt$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia		8 gennaio 2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $a_n > 0$ per ogni n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente, allora non è mai vero che: $\boxed{a}$ a_n è decrescente; $\boxed{b}$ $a_n \to 0$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{na_n} \to 0$; $\boxtimes$ $n^2 a_n \to 0$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x^2) - 3}{2(\log(1+x) - x)^2} =$ $\boxed{a}$ $-\frac{3}{4}$; $\boxtimes$ -3; $\boxed{c}$ $\frac{8}{9}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}$.

3. L'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \left(\frac{3-x}{1+x^2}\right)^n$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\{x \leq -3/2\} \cup \{x \geq 1\}$; $\boxed{b}$ $\{x < -3/2\} \cup \{x > 1\}$; $\boxed{c}$ $\{x \leq -1\} \cup \{x \geq 1/2\}$; $\boxtimes$ $\{x < -1\} \cup \{x > 1/2\}$.

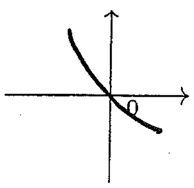
4. L'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2(2x)}{(x+1)x^\beta} dx$ è convergente è: $\boxed{a}$ $0 < \beta < \frac{3}{2}$; $\boxed{b}$ $\beta > \frac{1}{4}$; $\boxed{c}$ $\beta > 0$; $\boxtimes$ $0 < \beta < 1$.

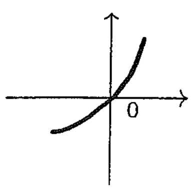
5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\displaystyle\int_0^1 f(2e^{2x})\, dx =$ $\boxed{a}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \frac{f(t)}{t}\, dt$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\, dt$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{e^2}}^{2} \frac{f(t)}{t}\, dt$; $\boxtimes$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{2}^{2e^2} \frac{f(t)}{t}\, dt$.

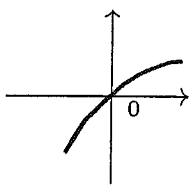
6. Il polinomio di Taylor di secondo grado con centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(1 - e^{-x})$ è: $\boxed{a}$ $1 + 2x^2$; $\boxed{b}$ $1 + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{c}$ $1 - 2x^2$; $\boxtimes$ $1 - \frac{x^2}{2}$.

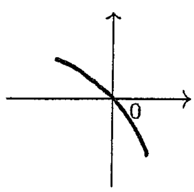
7. Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Se $2 \leq f(x) \leq 4$ per ogni $x \in [a, b]$ e $\int_a^b f(x)\, dx = 8$, allora è certamente vero che: $\boxed{a}$ $[a, b] \neq [0, 4]$; $\boxed{b}$ $[a, b] \neq [0, 3]$; $\boxed{c}$ $[a, b] \neq [0, 2]$; $\boxtimes$ $[a, b] \neq [0, 5]$.

8. Sia f una funzione continua strettamente negativa e sia F una sua primitiva tale che $F(0) < 0$. Indicate quale grafico rappresenta vicino a $x = 0$ la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = F(y^2 - y) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxtimes$ 

.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2014

1. **(6 punti)** Si determini per quali $x > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + x^2}{nx^{2n}+2}$ è convergente.

L'osservazione fondamentale è notare che x^{2n} ha diverso comportamento a seconda che sia $0<x<1$, $x=1$, $x>1$.

Precisamente, si ha $x^{2n} \to 0$ se $0<x<1$ (e anche $nx^{2n} \to 0$, poiché si può riscrivere come $n/(1/x^2)^n$, e gli esponenziali di base >1 vanno all'infinito più velocemente di ogni potenza; qui $\frac{1}{x^2}>1$...); $x^{2n} \to +\infty$ se $x>1$.

Dunque, usando il criterio di confronto asintotico,

$$\frac{3^n+x^2}{nx^{2n}+2} \sim \begin{cases} \dfrac{3^n}{2} & \text{se } 0<x<1 \ \text{: serie divergente, poiché } \dfrac{3^n}{2} \not\to 0 \\[2mm] \dfrac{3^n}{n} & \text{se } x=1 \ \text{: serie divergente, poiché } \dfrac{3^n}{n} \not\to 0 \\[2mm] \dfrac{3^n}{nx^{2n}} & \text{se } x>1 . \end{cases}$$

Resta solo da considerare la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{nx^{2n}}$ per $x>1$. Dal criterio del rapporto abbiamo

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)\,x^{2n+2}} \cdot \frac{n \cdot x^{2n}}{3^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{x^2}, \quad \text{e} \quad \frac{3}{x^2} < 1 \quad \text{per} \quad x>\sqrt{3}.$$

Quindi la serie converge per $x>\sqrt{3}$ e diverge per $x<\sqrt{3}$. Per $x=\sqrt{3}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{divergente.}$$

Conclusione: la serie converge per $x>\sqrt{3}$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2014

2. **(6 punti)** Disegnare il grafico qualitativo della funzione $f(x) = (|x-2|+1)(1+x)^{1/3}$; in particolare si studino crescenza e decrescenza, convessità e concavità, e si evidenzino i punti di non derivabilità.

Siccome $|x-2| = x-2$ se $x \geq 2$ e $|x-2| = 2-x$ se $x<2$, consideriamo le due funzioni $f_+(x) = (x-1)(1+x)^{1/3}$ (per $x \geq 2$) e $f_-(x) = (3-x)(1+x)^{1/3}$ (per $x<2$).

Si ha $f(0) = f_-(0) = 3$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_+(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f_-(x) = -\infty$ (le radici dispari conservano il segno dell'argomento...).

Poi $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x}(1+x)^{1/3} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-x}{x}(1+x)^{1/3} = +\infty$, e non ci sono asintoti obliqui.

Ancora: $f_+(x) > 0$ per $x \geq 2$, $f_+(2) = 3^{1/3}$; $f_-(x) > 0$ per $1+x>0$, cioè $-1 < x \leq 2$ e $f_-(x) < 0$ per $x<-1$, $f_-(x) = 0$ per $x=-1$, $f_-(2) = 3^{1/3}$.

Calcoliamo le derivate prime (per $x \neq -1$...):

$$f_+'(x) = (1+x)^{1/3} + (x-1)\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} = \left(1+x+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)(1+x)^{-2/3} = \frac{2}{3}(2x+1)(1+x)^{-2/3},$$

$$f_-'(x) = -(1+x)^{1/3} + (3-x)\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} = \left(-1-x+1-\frac{x}{3}\right)(1+x)^{-2/3} = -\frac{4}{3}x(1+x)^{-2/3}.$$

Quindi f_+ è crescente ($2x+1>0$ per $x>2$), mentre f_- è crescente per $x<0$, decrescente per $x>0$ (e $x<2$...). Il punto $x_0=0$ è di massimo relativo, il punto $x_0=2$ è di minimo relativo (f_- decresce per $0<x<2$, f_+ cresce per $x>2$).

Abbiamo anche $\lim_{x\to-1^-} f_-'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f_-'(x) = +\infty$; $\lim_{x\to2^-} f_-'(x) = -\frac{8}{3^{5/3}}$, $\lim_{x\to2^+} f_+'(x) = \frac{10}{3^{5/3}}$, per cui c'è "tangente" verticale in $x_0=-1$ e un punto spigoloso in $x_0=2$.

Calcoliamo le derivate seconde (per $x \neq -1$):

$$f_+''(x) = \frac{2}{3}\left[2(1+x)^{-2/3} - \frac{2}{3}(2x+1)(1+x)^{-5/3}\right] = \frac{2}{3}\left(2+2x-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-5/3} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)(1+x)^{-5/3} = \frac{4}{9}(x+2)(1+x)^{-5/3} > 0 \text{ per } x>2,$$

$$f_-''(x) = -\frac{4}{3}\left[(1+x)^{-2/3} - \frac{2}{3}x(1+x)^{-5/3}\right] = -\frac{4}{3}\left(1+x-\frac{2}{3}x\right)(1+x)^{-5/3} =$$

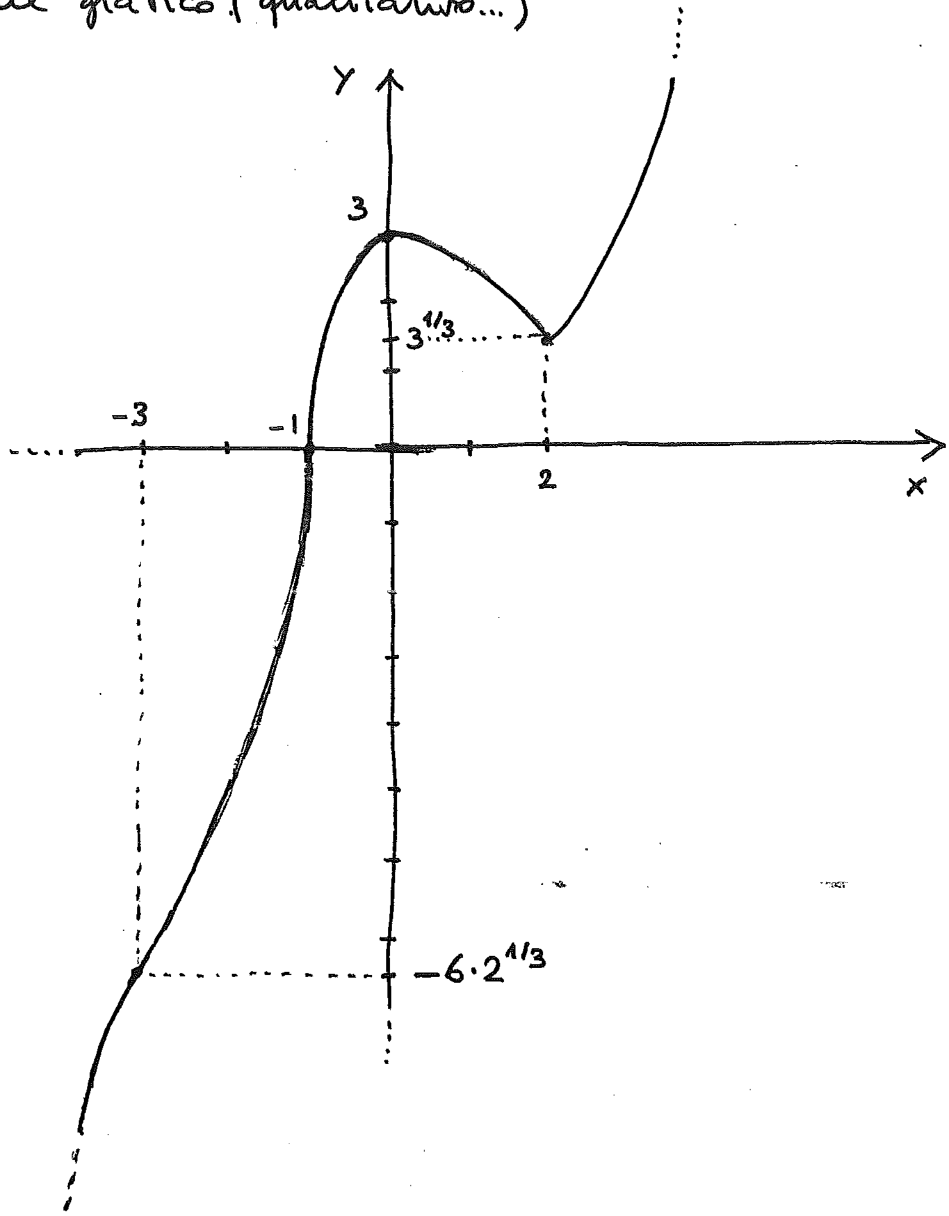
$$= -\frac{4}{9}(3+x)(1+x)^{-5/3} > 0 \text{ per } -3<x<-1, \ <0 \text{ per } x<-3 \text{ e } -1<x<2.$$

Quindi f è convessa per $-3<x<-1$ e $x>2$, concava per $x<-3$ e $-1<x<2$.
Si ha anche $f(-3) = -6\cdot 2^{1/3}$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2014

2. (6 punti) Disegnare il grafico qualitativo della funzione $f(x) = (|x-2|+1)(1+x)^{1/3}$; in particolare si studino crescenza e decrescenza, convessità e concavità, e si evidenzino i punti di non derivabilità.

Disegno del grafico (qualitativo...)



ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2014

3. (6 punti) Si determini la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(3x)\sqrt{2-y^2} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Il punto $x_0 = 0$ è di massimo relativo, di minimo relativo, o né di massimo relativo né di minimo relativo?

È un'equazione differenziale del 1° ordine, non-lineare, a variabili separabili. Si ha

$$\frac{dy}{dx} = \sin(3x)\sqrt{2-y^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{2-y^2}} = \int \sin(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)+c.$$

Ora $\sqrt{2-y^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-(y/\sqrt{2})^2}$, e ponendo $t = y/\sqrt{2}$, $dy = \sqrt{2}\,dt$ si ha

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2-y^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}\sqrt{2}\,dt = \arcsin t = \arcsin(y/\sqrt{2}).$$

Dunque abbiamo ottenuto

$$\arcsin(y/\sqrt{2}) = -\frac{1}{3}\cos(3x)+c,$$

e imponendo $y(0)=0$ viene $0 = \arcsin 0 = -\frac{1}{3}+c$, cioè $c = 1/3$.

In conclusione

$$\arcsin(y/\sqrt{2}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(3x).$$

La funzione inversa dell'arcoseno è il seno, dunque

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)}.$$

Come si legge direttamente dall'equazione $y' = \sin(3x)\sqrt{2-y^2}$, si ha $y'(x)<0$ per $x<0$ (è $\sin(3x)<0\ldots$) e $y'(x)>0$ per $x>0$ (è $\sin(3x)>0\ldots$). [Qui si intende per x "vicino" a $0\ldots$].

Dunque y decresce per $x<0$, x vicino a 0, e cresce per $x>0$, x vicino a 0. In conclusione $x_0=0$ è un punto di <u>minimo relativo</u>.