ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2015

1. (6 punti) Sia $A > 0$ e si considerino gli insiemi $K = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le A\cos^2 x\}$ e $Q = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1}{x+2}\}$. Si determini il valore del parametro $A > 0$ per cui il volume del solido ottenuto ruotando K attorno all'asse y è uguale al volume del solido ottenuto ruotando Q attorno all'asse x.

Il volume ottenuto ruotando K attorno all'asse y è dato da $2\pi \int_0^{\pi} x A \cos^2 x \, dx$. Si può calcolare per parti, inizialmente determinando una primitiva di $\cos^2 x$. A questo riguardo si ha:

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \cos x - \int \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x) dx =$$
$$= \operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \operatorname{sen} x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx,$$

per cui $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x \cos x + x) + \text{costante}$.

Dunque

$$A 2\pi \int_0^{\pi} x \cos^2 x \, dx = A 2\pi \left[x \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x \cos x + x) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x \cos x + x) dx \right] =$$
$$= A 2\pi \left[\pi^2/2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x \Big|_0^{\pi} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} \right) \right] = A 2\pi \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} \right) = A\frac{\pi^3}{2}.$$

Il volume ottenuto ruotando Q attorno all'asse x è dato da

$$\pi \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx = \pi \left(-\frac{1}{x+2} \Big|_0^1 \right) = \pi \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \pi/6.$$

Dunque il valore di A è quello per cui

$$A\frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi}{6},$$

cioè $A = \frac{1}{3\pi^2}$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2015

2. (6 punti) Data la funzione definita dalla formula

$$f(x) = \begin{cases} |\arctan x| & \text{per } |x| \le 1 \\ \frac{\pi}{3x^2 - x^5} & \text{per } |x| > 1\,, \end{cases}$$

si determinino dominio, punti di discontinuità e punti di non derivabilità, limiti, crescenza e decrescenza, eventuali punti di massimo relativo, minimo relativo, massimo assoluto e minimo assoluto, e infine se ne disegni il grafico. [Non è richiesto lo studio della convessità e concavità.]

La funzione non è definita per $3x^2 - x^5 = 0$ (nella zona $|x|>1$), cioè $3 - x^3 = 0$, cioè $x = \sqrt[3]{3}$. Dunque dominio di f : $x \neq \sqrt[3]{3}$.

Poi si ha $\lim_{x\to\sqrt[3]{3}^+} f(x) = -\infty$ ($f(x)$ è negativa per $3-x^3<0$ e $|x|>1$, cioè $x>\sqrt[3]{3}$), e ancora $\lim_{x\to\sqrt[3]{3}^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{3x^2-x^5} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{3x^2-x^5} = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\pi}{3x^2-x^5} = \pi/2$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}\frac{\pi}{3x^2-x^5} = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = |\operatorname{arctg} 1| = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = |\operatorname{arctg}(-1)| = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Il punto $x=1$ è dunque punto di non continuità (discontinuità di salto).

Per $|x|\le 1$ abbiamo $f(x) = |\operatorname{arctg} x|$; la funzione $\operatorname{arctg} x$ è ben nota, dunque sappiamo che $f(x)$ in $[-1,1]$ è pari, decrescente per $-1 < x < 0$, crescente per $0<x<1$, con $f(0)=0$ e con $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x^2} = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{1+x^2} = -1$. Inoltre, guardando il rapporto incrementale, si ha $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\operatorname{arctg} h}{h} = 1$, $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{\operatorname{arctg} h}{h} = -1$, e $x=0$ è punto di non derivabilità.

La derivata di f per $|x|>1$ vale $f'(x) = -\frac{\pi}{(3x^2-x^5)^2}(6x-5x^4)$, e si ha $f'(x)>0$ per $x(5x^3-6)>0$, cioè $x>\sqrt[3]{6/5}$, oppure $x<0$ (e $x<-1$...).

Dunque f cresce per $x<-1$, decresce per $-1<x<0$, cresce per $0<x<1$, decresce per $1<x<\sqrt[3]{6/5}$, cresce per $\sqrt[3]{6/5}<x<\sqrt[3]{3}$ e per $x>\sqrt[3]{3}$.

In conclusione: $x=-1$ punto di massimo relativo; $x=0$ punto di minimo relativo; $x=\sqrt[3]{6/5}$ punto di minimo relativo; non ci sono punti di massimo assoluto né di minimo assoluto (dato che $f(x)\to\pm\infty$ per $x\to\sqrt[3]{3}^{\mp}$).

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2015

2. **(6 punti)** Data la funzione definita dalla formula

$$f(x) = \begin{cases} |\arctan x| & \text{per } |x| \le 1 \\ \frac{\pi}{3x^2 - x^5} & \text{per } |x| > 1 \,, \end{cases}$$

si determinino dominio, punti di discontinuità e punti di non derivabilità, limiti, crescenza e decrescenza, eventuali punti di massimo relativo, minimo relativo, massimo assoluto e minimo assoluto, e infine se ne disegni il grafico. [Non è richiesto lo studio della convessità e concavità.]

Nel punto $x=-1$ si ha che il rapporto incrementale ha valori diversi per $h>0$ e $h<0$: precisamente

$\underline{h>0}$: $$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{|\text{arctg}(-1+h)| - |\text{arctg}(-1)|}{h} = \frac{\text{arctg}(1-h) - \text{arctg}\,1}{h}$$

e il limite è $-(\text{arctg}\,x)'|_{x=1} = -\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{2}$;

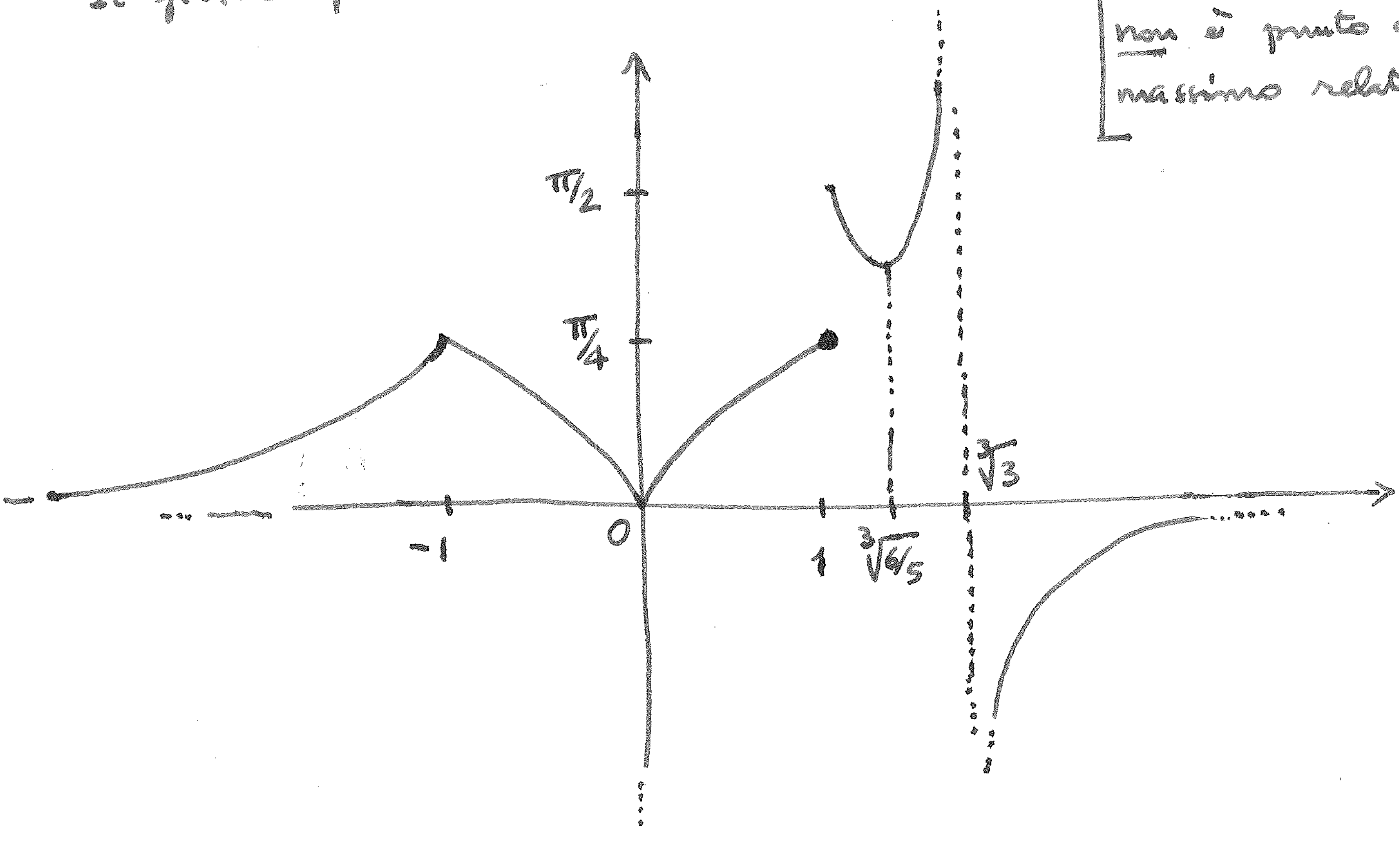
$\underline{h<0}$: $$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\pi}{h}\left(\frac{1}{3x^2-x^5}\Big|_{x=-1+h} - \frac{1}{3x^2-x^5}\Big|_{x=-1}\right),$$

e il limite è $\left(\frac{\pi}{3x^2-x^5}\right)'\Big|_{x=-1} = -\frac{\pi}{(3x^2-x^5)^2}(6x-5x^4)\Big|_{x=-1} = \frac{11}{16}\pi$,

quindi $x=-1$ è punto di non derivabilità.

Il grafico qualitativo è

[Si noti che $x=1$ non è punto di massimo relativo.]



ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2015

3. **(6 punti)** Si determini la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{(1+x^2)ye^{y^2}} \\ y(0) = -\sqrt{\log 3}\,. \end{cases}$$

È un'equazione differenziale non lineare del 1° ordine a variabili separabili. Si ha, scrivendo $y' = \frac{dy}{dx}$ e separando le variabili:

$$ye^{y^2}\,dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

Integrando:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + \text{cost}\,; \quad \int ye^{y^2}dy = \frac{1}{2}e^{y^2} + \text{cost}\,,$$

per cui

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = \operatorname{arctg} x + c \;\underset{\text{imponendo il dato di Cauchy}}{\Rightarrow}\; \frac{1}{2}e^{\log 3} = c \Rightarrow c = \frac{3}{2}\,.$$

Dunque

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = \operatorname{arctg} x + \frac{3}{2} \Rightarrow e^{y^2} = 2\operatorname{arctg} x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \log(2\operatorname{arctg} x + 3) \Rightarrow y = -\sqrt{\log(2\operatorname{arctg} x + 3)}\,.$$

[Va scelto il segno − nella radice, poiché il dato di Cauchy è negativo!]