ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2016

1. (6 punti) Disegnare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-1}{x+1} & \text{per } x < 0 \\ x^2 - x - 1 + x^3 & \text{per } x \geq 0\,. \end{cases}$$

In particolare si determinino dominio, limiti, eventuali asintoti obliqui, crescenza e decrescenza, eventuali punti e valori di massimo relativo, di minimo relativo, di massimo assoluto e di minimo assoluto, eventuali punti di non derivabilità, concavità e convessità.

Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{x=-1\}$. Si ha $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ (poiché $\lim_{x\to -1^-}(x^2+3x-1) = -3$), $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ (poiché $f(x) \sim x$ per $x \to -\infty$), $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Non ci sono dunque né il max né il min assoluto.

Per gli asintoti obliqui si ha $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2+x} = 1$; $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x-1-x^2-x}{x+1} = 2$, per cui $y = x+2$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

Poi $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-1+x^3}{x} = +\infty$, e non c'è asintoto obliquo a $+\infty$.

Derivando si ha:

$x<0$: $\left(\frac{x^2+3x-1}{x+1}\right)' = \frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+5x+3-x^2-3x+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}$;

$x>0$: $(x^2-x-1+x^3)' = 2x-1+3x^2$.

Poi $x^2+2x+4 > x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0$, dunque $f(x)$ è strettamente crescente per $x<0$. Invece $3x^2+2x-1 = 0$ per $x = \frac{-1\mp\sqrt{1+3}}{3} = \begin{cases} -1 \\ 1/3 \end{cases}$, per cui $f(x)$ decresce per $0<x<1/3$ e cresce per $x>1/3$. In particolare, $x = 1/3$ è punto di minimo relativo, e $x=0$ è punto di massimo relativo (f cresce per $x<0$, f decresce per $0<x<1/3$ ...). Il valore di minimo relativo in $1/3$ è $1/27 - 1/3 - 1 + 1/9 = -\frac{32}{27}$; il valore di massimo relativo in 0 è -1.

Il rapporto incrementale nel punto $x=0$ per $h<0$ vale $\left(\frac{h^2+3h-1}{h+1}+1\right)\frac{1}{h} = \frac{h^2+4h}{h^2+h} \xrightarrow[h\to 0^-]{} 4$;
per $h>0$ vale $\frac{h^2-h-1+h^3+1}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} -1$, per cui $x=0$ è un punto di non derivabilità.

La derivata seconda vale, per $x<0$, $\frac{(2x+2)(x+1)^{\cancel{2}} - (x^2+2x+4)2\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}} =$
$= \frac{\cancel{2x^2}+\cancel{4x}+2-\cancel{2x^2}-\cancel{4x}-8}{(x+1)^3} = \frac{-6}{(x+1)^3}$, dunque f è convessa per $x<-1$, concava per $-1<x<0$.

Per $x>0$ la derivata seconda vale $2+6x$, e quindi f è convessa per $x>0$.

Infine $f(x)=0$ per $x^2+3x-1=0$, cioè $x = \frac{-3\mp\sqrt{13}}{2}$ (ma la radice positiva va scartata perché dà $x>0$).

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2016

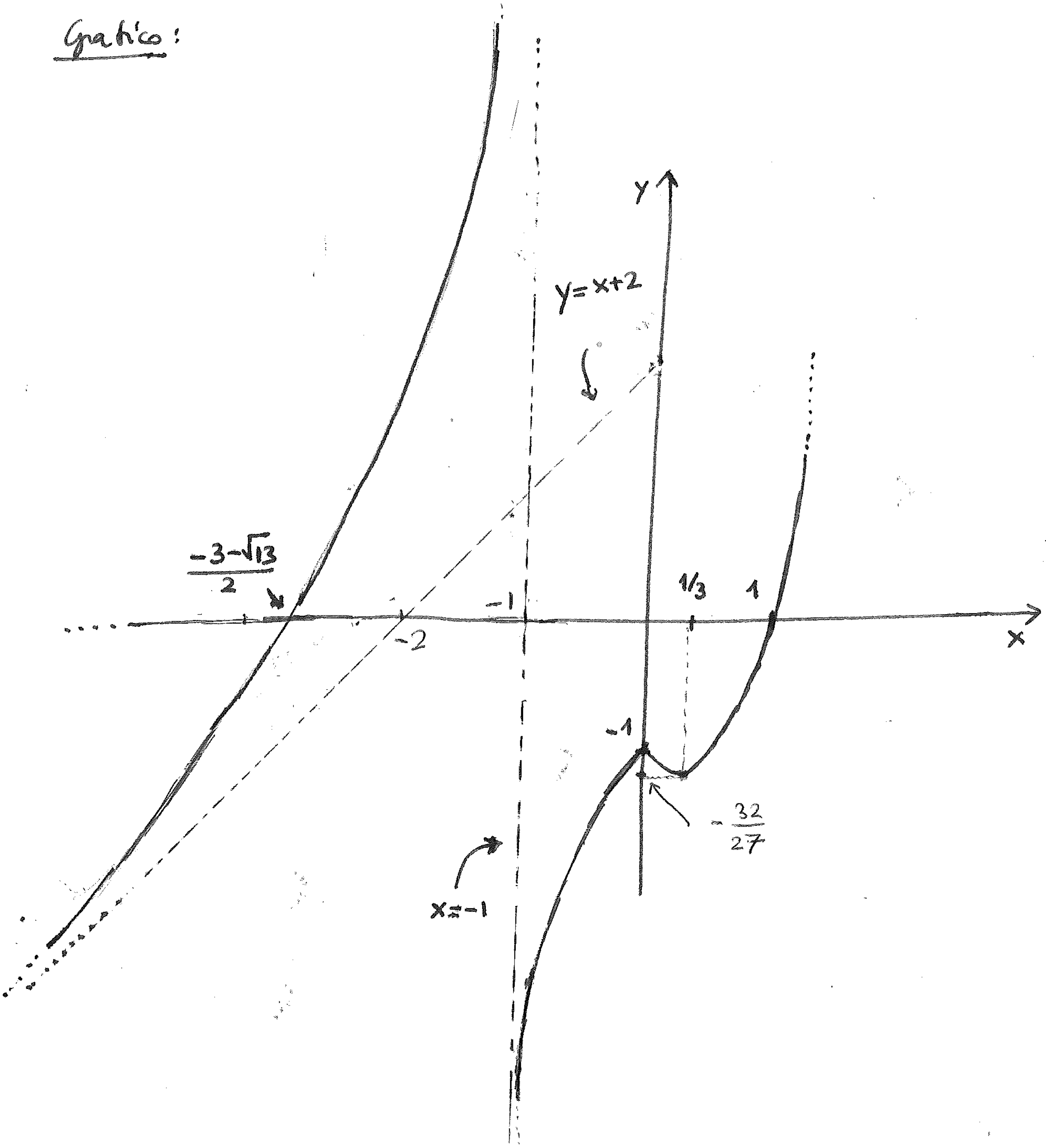
1. (6 punti) Disegnare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-1}{x+1} & \text{per } x < 0 \\ x^2 - x - 1 + x^3 & \text{per } x \geq 0\,. \end{cases}$$

In particolare si determinino dominio, limiti, eventuali asintoti obliqui, crescenza e decrescenza, eventuali punti e valori di massimo relativo, di minimo relativo, di massimo assoluto e di minimo assoluto, eventuali punti di non derivabilità, concavità e convessità.

Con un po' di attenzione si riesce anche a vedere che $f(1)=0$.

Grafico:



ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2016

2. **(6 punti)** Per ogni valore del parametro $\alpha > 0$, si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sin\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x} + \frac{4}{3x^3}\right)\log\left(2-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{e^{1/x^\alpha} - 1 - \frac{1}{x^{7/2}}}.$$

Poniamo $t = 1/x$, così abbiamo $t \to 0^+$. Gli sviluppi di Taylor ci danno, per $t \to 0$:

$$\sin(2t) = 2t - \frac{8t^3}{6} + \frac{32}{120}t^5 + o(t^5), \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

$$\log(1+w) = w + o(w) \ (\text{per } w\to 0), \quad e^{t^\alpha} = 1 + t^\alpha + \frac{t^{2\alpha}}{2} + o(t^{2\alpha}).$$

Dunque abbiamo:

$$\frac{\left(\sin(2t) - 2t + \frac{4}{3}t^3\right)\log(2-\cos t)}{e^{t^\alpha} - 1 - t^{7/2}} = \frac{\left(\frac{4}{15}t^5 + o(t^5)\right)\log(1 + 1-\cos t)}{t^\alpha + \frac{t^{2\alpha}}{2} - t^{7/2} + o(t^{2\alpha})} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{15}t^5 + o(t^5)\right)\left(1-\cos t + o(1-\cos t)\right)}{t^\alpha + \frac{t^{2\alpha}}{2} - t^{7/2} + o(t^{2\alpha})} = \frac{\left(\frac{4}{15}t^5 + o(t^5)\right)\left(\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^\alpha + \frac{t^{2\alpha}}{2} - t^{7/2} + o(t^{2\alpha})} =$$

$$1 - \cos t = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$o(1-\cos t) = o(t^2)$$

$$= \frac{\frac{2}{15}t^7 + o(t^7)}{t^\alpha + \frac{t^{2\alpha}}{2} - t^{7/2} + o(t^{2\alpha})}.$$

Dunque se $\alpha > 7/2$ si ha

$$\ldots = \frac{2/15\, t^7 + o(t^7)}{-t^{7/2} + o(t^{7/2})} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0^-.$$

Se $\alpha < 7/2$ si ha

$$\ldots = \frac{2/15\, t^7 + o(t^7)}{t^\alpha + o(t^\alpha)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0^+.$$

Se $\alpha = 7/2$ si ha (dato che $2\alpha = 7$...)

$$\ldots = \frac{2/15\, t^7 + o(t^7)}{t^{7/2} + o(t^7)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac{4}{15}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2016

3. (6 punti) Determinare, per x "vicino" a 0, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{2x}\sqrt{4-y^2} \\ y(0) = \sqrt{3}\,. \end{cases}$$

È un'equazione non-lineare del 1° ordine a variabili separabili.
Scrivendo $y' = \frac{dy}{dx}$ abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}\sqrt{4-y^2} \longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = e^{2x}dx \longrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \int e^{2x}dx\,.$$

Si ha

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \int \frac{1}{2\sqrt{1-(y/2)^2}}\,dy = \frac{1}{2}\arcsin(y/2)\cdot 2 + \text{cost}\,,$$

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \text{cost}\,,$$

quindi

$$\arcsin(y/2) = \frac{1}{2}e^{2x} + \text{cost}\,.$$

Imponendo il dato di Cauchy viene $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \frac{1}{2} + \text{cost}$,
per cui $\text{cost} = \arcsin(\sqrt{3}/2) - 1/2 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$.

In conclusione

$$\arcsin\left(\frac{y(x)}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$$

e

$$\boxed{y(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\right)}\,.$$

[Perché per x "vicino" a 0? Perché l'arcoseno è l'inversa del seno quando l'argomento del seno è fra $-\pi/2$ e $\pi/2$, quindi per arrivare alla soluzione $y(x)$ bisogna che sia

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \le \frac{\pi}{2}\,.$$

La prima disuguaglianza è sempre vera, la seconda se x non è troppo grande: $x \le \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{3}+1\right)$...]