ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	8 luglio 2015

1. (6 punti) Sia $a \in \mathbf{R}$, e si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\log\left((1-x)^3\right) & \text{se } x < 1 \\ 2\arctan\left((x-1)^3\right) + a & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(i) Per $a = -1$, determinare gli eventuali massimi e minimi relativi, massimi e minimi assoluti su tutto $\mathbf{R}$ e i punti in cui essi sono raggiunti, e disegnare qualitativamente il grafico di f.
(ii) Determinare tutti gli eventuali valori di $a \in \mathbf{R}$ per cui f risulti continua su $\mathbf{R}$.
(iii) Determinare tutti gli eventuali valori di $a \in \mathbf{R}$ per cui f abbia massimo assoluto su $\mathbf{R}$.

(i) Per le proprietà del logaritmo, f si può riscrivere come $3(x-1)\log(1-x)$ per $x<1$. Si ha facilmente

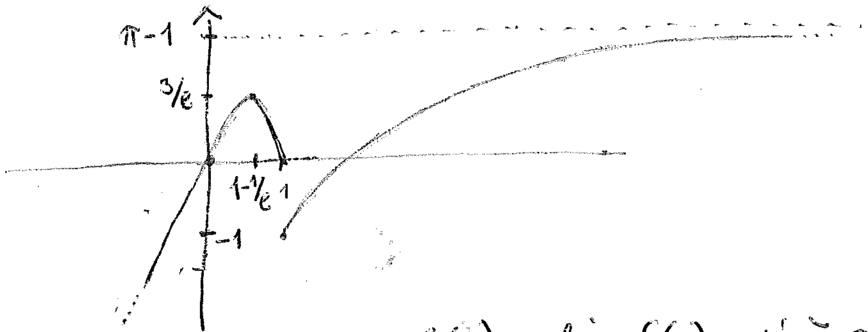
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0^+$ (Hôpital per $\log t / \frac{1}{t}$, $t \to 0^+$) ; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = -1$ $(=a)$;

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2\cdot(+\frac{\pi}{2}) - 1 = +\pi - 1$; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$; $f(0) = 0$.

Poi si ha $f'(x) = 3\log(1-x) + 3(x-1)\frac{1}{1-x}(-1) = 3(\log(1-x)+1)$ per $x<1$ e $f'(x) = 2\frac{1}{1+(x-1)^6}$ per $x>1$. Quindi $f'(x)>0$ per $x>1$ e quando $\log(1-x) > -1$, cioè $x < 1-e^{-1} = 1-1/e$. Di conseguenza f è crescente per $x<1-1/e$ e per $x>1$, decrescente per $1-1/e < x < 1$.

Si ha poi $f(1-1/e) = 3(-1/e)\log(1/e) = 3/e$.

In conclusione: f ha un massimo relativo in $1-1/e$ che vale $3/e$; siccome $3/e < 3/2 < 2 < \pi - 1$, f non ha massimo assoluto; f ha minimo relativo in 1 che vale -1; siccome $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, f non ha minimo assoluto.



(ii) Per essere continua, si deve avere $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$, cioè $a = 0$.

(iii) Per avere massimo assoluto, bisogna che $f(1-1/e) = 3/e \geq \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi + a$, dunque $a \leq 3/e - \pi$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	8 luglio 2015

2. (6 punti) Si calcoli
$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\,.$$
[Suggerimento: si ricordi che $(\sqrt{x^2+1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.]

(ii) L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ è convergente o divergente?

(i) Usando il suggerimento ed integrando per parti si ha

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1}\;x^2\Big|_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx \overset{\text{si noti che } (x^2+1)'=2x\dots}{=}$$

$$= \sqrt{2} - (x^2+1)^{3/2}\,\frac{2}{3}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

(ii) Siccome per $x \to +\infty$ si ha $\sqrt{x^2+1} \sim x$, l'integrale improprio all'infinito è asintoticamente analogo a $\frac{1}{x}$, e quindi è divergente. [Siccome $\sqrt{x^2+1} \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, non ci sono altri punti di "impropriètà" per x finito.]

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	8 luglio 2015

3. **(6 punti)** Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 7y' + 12y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

È un'equazione lineare del 2° ordine a coefficienti costanti, non-omogenea.
Per risolvere l'omogenea si considera il polinomio associato $r^2+7r+12$, le cui radici sono $r = \frac{-7 \mp \sqrt{49-48}}{2} = \begin{cases} -4 \\ -3 \end{cases}$.
Si ha dunque la soluzione dell'omogenea

$$y_0(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-3x}.$$

Una soluzione particolare della non-omogenea ha la forma $y_*(x) = A + Bx + Cx^2$. Dunque $y_*'(x) = B + 2Cx$, $y_*''(x) = 2C$ e deve essere

$$2C + 7(B + 2Cx) + 12(A + Bx + Cx^2) = x^2,$$

cioè $12Cx^2 = x^2 \Rightarrow C = 1/12$, $(14C + 12B)x = 0 \Rightarrow B = -\frac{14}{144} = -\frac{7}{72}$, e infine $2C + 7B + 12A = 0 \Rightarrow A = -\frac{C}{6} - \frac{7}{12}B$, cioè

$$A = -\frac{1}{72} - \frac{7}{12}\left(-\frac{7}{72}\right) = \left(\frac{49}{12} - 1\right)\frac{1}{72} = \frac{37}{864}.$$

In conclusione $y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-3x} + \frac{37}{864} - \frac{7}{72}x + \frac{1}{12}x^2$.
Di conseguenza si ha $y'(x) = -4c_1 e^{-4x} - 3c_2 e^{-3x} - \frac{7}{72} + \frac{1}{6}x$, e imponendo i dati di Cauchy si ottiene

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + \frac{37}{864} & \Rightarrow c_1 = -c_2 - \frac{37}{864} \\ 0 = -4c_1 - 3c_2 - \frac{7}{72} & 3c_2 + 4\left(-c_2 - \frac{37}{864}\right) = -\frac{7}{72} \Rightarrow c_2 = \frac{7}{72} - \frac{37}{216} = -\frac{16}{216} = -\frac{2}{27} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{2}{27} - \frac{37}{864} = \frac{1}{32}.$$

La soluzione cercata è dunque

$$y(x) = \frac{1}{32}e^{-4x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + \frac{37}{864} - \frac{7}{72}x + \frac{1}{12}x^2.$$