ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	8 luglio 2016

1. (6 punti) Si determini il polinomio di Taylor di quarto grado e di centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \log(1 + x\cos x) - 2xe^{x^2}$.

Si ha:

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4) \quad (\text{per } t \approx 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad (\text{per } x \approx 0)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (\text{per } t \approx 0),$$

quindi

$$x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + o(x^4), \qquad -2xe^{x^2} = -2x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = -2x - 2x^3 + o(x^4)$$

$$\log(1 + x\cos x) = \left[x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right] - \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right]^2 + \frac{1}{3}\left[x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right]^3 -$$

$$- \frac{1}{4}\left[x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right]^4 = x - \frac{x^3}{2} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^4 + o(x^4)\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(x^3 + o(x^4)\right) - \frac{1}{4}\left(x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$

In conclusione,

$$\log(1 + x\cos x) - 2xe^{x^2} = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - 2x - 2x^3 + o(x^4) =$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4),$$

e il polinomio cercato è

$$P_4(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	8 luglio 2016

2. (6 punti) Determinate l'insieme dei valori $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, per cui la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - n^3}{10^n + n} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 2} \right)^n$$

è convergente.

Siccome $5^n - n^3 > 0$ per $n \geq 0$, la serie ha i coefficienti $\frac{5^n - n^3}{10^n + n} > 0$. Ponendo $t = \frac{x^2+x-2}{x-2}$, è una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ con $a_n > 0$.

Cerchiamo il raggio di convergenza:

gli esponenziali vanno all'infinito più velocemente dei polinomi...

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1} - (n+1)^3}{10^{n+1} + n+1}}{\frac{5^n - n^3}{10^n + n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{\cancel{n+1}}}{10^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{10^n}}{\cancel{5^n}} = \frac{1}{2},$$

per cui $r = 2$.

C'è dunque convergenza per $\left|\frac{x^2+x-2}{x-2}\right| < 2$, non c'è convergenza per $\left|\frac{x^2-x-2}{x-2}\right| > 2$. Inoltre, quando $\left|\frac{x^2+x-2}{x-2}\right| = 2$, il termine generale della serie in modulo vale $\frac{5^n - n^3}{10^n + n} 2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, per cui la serie non è convergente (il termine generale non tende a 0...).

Vediamo quando accade $\left|\frac{x^2+x-2}{x-2}\right| < 2$.

Se $x > 2$, vuol dire

$$-2x + 4 < x^2 + x - 2 < 2x - 4 \iff \begin{cases} x^2 - x + 2 < 0 \to \text{mai!} \\ x^2 + 3x - 6 > 0 \to \text{(questo quindi non importa)} \end{cases}$$

Le radici di $x^2 - x + 2 = 0$ sono $x = \frac{1 \mp \sqrt{1-8}}{2}$, complesse. Dunque $x^2 - x + 2$ non è mai < 0 (e non ha quindi importanza trovare dove $x^2+3x-6 > 0$...).

Se $x < 2$, vuol dire

$$2x - 4 < x^2 + x - 2 < 4 - 2x \iff \begin{cases} x^2 + 3x - 6 < 0 \\ x^2 - x + 2 > 0 \to \text{sempre, per quanto visto prima...} \end{cases}$$

Le radici di $x^2 + 3x - 6 = 0$ sono $x = \frac{-3 \mp \sqrt{9+24}}{2} = \frac{-3 \mp \sqrt{33}}{2}$, e quindi $x^2 + 3x - 6 < 0$ per $\frac{-3-\sqrt{33}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$, purché sia $x < 2$. Siccome $\frac{-3+\sqrt{33}}{2} < 2$ (poiché $\sqrt{33} < 7$...), la conclusione è che la serie è convergente per

$$\frac{-3-\sqrt{33}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{33}}{2}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	8 luglio 2016

3. **(6 punti)** Determinate la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2+2y}\,\dfrac{x+1}{y+1} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

È un'equazione non lineare del 1° ordine, a variabili separabili.
Si ha, riscrivendo:

$$\frac{y+1}{\sqrt{y^2+2y}}\,dy = (x+1)\,dx\,,$$

dunque integrando a sinistra e a destra si ottiene

$t = y^2+2y$, $dt = (2y+2)dy$, $(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ ...

$$\sqrt{y^2+2y} \overset{\nearrow}{=} \frac{2}{2}\int \frac{y+1}{\sqrt{y^2+2y}}\,dy = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2}+x+c\,,$$

Per determinare c imponiamo il dato di Cauchy: essendo $y(0)=1$ si ha

$$\sqrt{1+2} = c\,.$$

Dunque abbiamo ottenuto

$$\sqrt{y^2+2y} = \frac{x^2}{2}+x+\sqrt{3} \longrightarrow y^2+2y - \left(\frac{x^2}{2}+x+\sqrt{3}\right)^2 = 0$$

e dunque

$$y = -1 \mp \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{2}+x+\sqrt{3}\right)^2}\,.$$

Siccome il dato di Cauchy è $y(0)=1$, la radice di segno negativo va scartata. Dunque la soluzione è

$$y(x) = -1+\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{2}+x+\sqrt{3}\right)^2}\,.$$