COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

9 febbraio 2011

Esercizio 1 (7 punti)

Si determini per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{g}(x,y) = (x(x^2+y^2)^\alpha, y(x^2+y^2)^\alpha)$$

è sia a rotore nullo che a divergenza nulla per $(x,y) \neq (0,0)$. Se possibile, se ne determini quindi un potenziale per $(x,y) \neq (0,0)$.

Risultati: $\alpha = -1$ | $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \text{cost.}$

Calcoli:

Il rotore è dato da $\left(0,0,\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)$, quindi, essendo

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \alpha y (x^2+y^2)^{\alpha-1} 2x \quad , \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \alpha x (x^2+y^2)^{\alpha-1} 2y \quad ,$$

il rotore di $\vec{g}$ è nullo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

La divergenza è data da $\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}$. Calcoliamola:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} = (x^2+y^2)^\alpha + x\alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}2x + (x^2+y^2)^\alpha + y(x^2+y^2)^{\alpha-1}2y =$$

$$= (x^2+y^2)^{\alpha-1}\left[2(x^2+y^2) + 2\alpha x^2 + 2\alpha y^2\right] = (x^2+y^2)^\alpha 2(1+\alpha).$$

Si ha dunque divergenza nulla per $\underline{\alpha=-1}$.

L'esistenza di un potenziale di $\vec{g}$ non è garantita dalla condizione $\text{rot}\,\vec{g} = \vec{0}$, poiché $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ <u>non</u> è un insieme semplicemente connesso.

Ma si ha anche che $\int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{\ell} = 0$ se γ è la circonferenza di centro O e raggio 1 ($\vec{g}$ è ortogonale al vettore tangente γ'...), dunque un potenziale esiste. Calcoliamolo: si deve avere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \text{ dunque } \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + k(y).$$

$$\left[\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx \overset{x^2+y^2=t,\ 2x\,dx=dt}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log t + k \right.$$

Ancora

$$\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y + k'(y) \Rightarrow k'(y) = 0 \Rightarrow k(y) = \text{costante}.$$

"Il" potenziale è quindi $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \text{cost.}$

Esercizio 2 (8 punti)

Si determini la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = xy - 2x^3 + y^2 - \frac{1}{2}y$. Se ne determinino quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto nel rettangolo di vertici $(0,0)$, $(0,\frac{3}{2})$, $(-1,\frac{3}{2})$, $(-1,0)$.

Risultato: PUNTI STAZIONARI: $(1/6, 1/6)$, SELLA; $(-1/4, 3/8)$, MINIMO RELATIVO. MINIMO ASSOLUTO IN RETTANGOLO: $-\frac{7}{64} = f(-1/4, 3/8)$; MASS. ASSOL: $2 = f(-1, 3/2) = f(-1,0)$.

Calcoli:

Calcoliamo il gradiente di f: $\frac{\partial f}{\partial x} = y - 6x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 1/2$.

Uguagliandolo a $\vec{0}$ il gradiente si ha:

$$y = 6x^2 \longrightarrow x + 12x^2 - 1/2 = 0, \text{ cioè } 24x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Questo dà

$$x = \frac{-1 \mp \sqrt{1+24}}{24} = \begin{cases} -\frac{6}{24} = -1/4 \rightarrow y = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \\ \frac{4}{24} = 1/6 \rightarrow y = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Calcoliamo l'hessiano: viene la matrice $\begin{pmatrix} -12x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Quindi nel punto stazionario $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ abbiamo determinante uguale a -5, e il punto è di <u>sella</u>. Nel punto $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8})$ abbiamo determinante uguale a 5 e traccia uguale a 5, dunque il punto è di <u>minimo relativo</u>.

Nel punto $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8})$, che è interno al rettangolo, vale $f(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}) = -\frac{7}{64}$.

Vediamo sui lati del rettangolo. <u>Per $x=0$</u> la funzione vale $y^2 - y/2$, la cui derivata si annulla per $y = 1/4$. Si ha $f(0, 1/4) = -\frac{1}{16}$.

<u>Per $y=0$</u> la funzione vale $-2x^3$, la cui derivata non si annulla per $-3/2 < x < 0$. <u>Per $y = 3/2$</u> la funzione vale $-2x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$, la cui derivata si annulla per $-6x^2 + \frac{3}{2} = 0$, cioè $x = \pm 1/2$ (e solo $x = -\frac{1}{2}$ è nell'intervallo $-\frac{3}{2} < x < 0$). Si ha $f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 1$. <u>Per $x = -1$</u> la funzione vale $y^2 - \frac{3}{2}y + 2$, la cui derivata si annulla per $y = \frac{3}{4}$.

Si ha $f(-1, 3/4) = \frac{23}{16}$. Infine nei vertici del rettangolo (che sono gli estremi dei lati...) si ha $f(0,0) = 0$, $f(0, \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$, $f(-1, \frac{3}{2}) = 2$, $f(-1, 0) = 2$.

In conclusione, il minimo assoluto di f nel rettangolo è $-\frac{7}{64} = f(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8})$, il massimo assoluto è $2 = f(-1, \frac{3}{2}) = f(-1, 0)$.

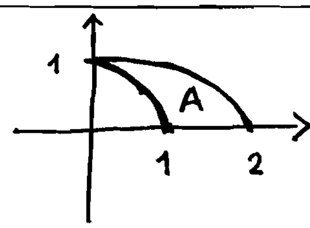
Esercizio 3 (7 punti)

Si calcoli l'integrale $\iint_A \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy$, ove A è la parte del primo quadrante $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ compresa fra la circonferenza $\{x^2+y^2=1\}$ e l'ellisse $\{\frac{x^2}{4}+y^2=1\}$.

Risultato: $\boxed{\frac{2}{3}\log 2 - \frac{1}{4}}$

Calcoli:

L'insieme A è questo :



Si può calcolare l'integrale sul "quarto" di ellisse E e sottrarne l'integrale sul "quarto" di cerchio C... (per esercizio...)

Usiamo coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\theta\in[0,\pi/2]$, $\rho\in[1,\rho_*(\theta)]$. Calcoliamo $\rho_*(\theta)$: inserendo nell'equazione dell'ellisse $x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ si trova

$$\frac{1}{4}\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta=1 \Rightarrow \rho^2=\frac{4}{\cos^2\theta+4\,\mathrm{sen}^2\theta},$$

per cui $\rho_*(\theta)=\frac{2}{\sqrt{\cos^2\theta+4\,\mathrm{sen}^2\theta}}=\frac{2}{\sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2\theta}}$.

L'integrale richiesto dunque vale:

$$\iint_A \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^{2/\sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2\theta}} d\rho\left(\rho\cdot\frac{\rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2}\right)=$$

$$=\int_0^{\pi/2} d\theta\left(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\rho^2}{2}\Big|_{\rho=1}^{\rho=2/\sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2\theta}}\right)=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{1}{2}\left(\frac{4}{1+3\,\mathrm{sen}^2\theta}-1\right)d\theta=-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta)\,d\theta+$$

$$+\int_0^{\pi/2}\frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{1+3\,\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{8}\cos(2\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}+\frac{1}{3}\log(1+t)\Big|_{t=0}^{t=3}=$$

$$3\,\mathrm{sen}^2\theta=t$$
$$6\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta=dt$$

$$=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\log 4=\frac{2}{3}\log 2-\frac{1}{4}.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si calcoli l'integrale $\iiint_P z\,dxdydz$, ove P è la piramide avente per base il quadrato $[0,1]\times[0,1]$ e per vertice il punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$.

Risultato: $\boxed{\frac{1}{3}}$

Calcoli:

Per ragioni di simmetria, basta integrare sul "quarto" di base dato dal triangolo T di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1/2, 1/2)$. Il piano passante per $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(1/2,1/2,2)$ ha equazione $z=4y$.

Dunque bisogna calcolare, integrando per fili:

$$\iiint_P z\,dxdydz = 4\iint_T dxdy\left(\int_0^{4y} z\,dz\right) = 32\iint_T y^2\,dxdy = \dots$$ finire per esercizio...

Integrando per strati, si vede che l'intersezione della piramide con il piano a quota z e parallelo al piano (x,y) è data dal quadrato $[z/4, 1-z/4]\times[z/4, 1-z/4]$. [Nel piano verticale $y=1/2$, la retta che congiunge $(0,1/2,0)$ con $(1/2,1/2,2)$ è data da $z=4x$, quella che congiunge $(1/2,1/2,2)$ con $(1,1/2,0)$ è data da $z=-4x+4$ ...]

Dunque

$$\iiint_P z\,dxdydz = \int_0^2 dz\left[\int_{z/4}^{1-z/4} dx\left(\int_{z/4}^{1-z/4} z\,dy\right)\right] = \int_0^2 z\left(1-\frac{z}{2}\right)^2 dz = \int_0^2\left(z-z^2+\frac{z^3}{4}\right)dz =$$

$$= \left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{16}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=2} = 2-\frac{8}{3}+1 = \frac{1}{3}.$$