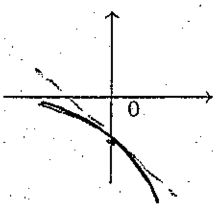
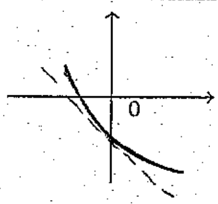
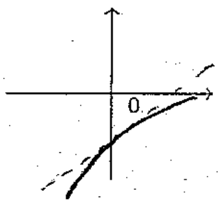
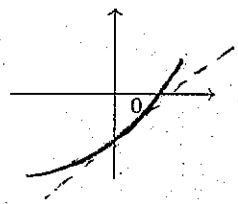
ANALISI MATEMATICA 1		9 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-2)y' + 2y = x^2 \\ y(0) = -1 . \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(x)$ vicino all'origine è:

$\boxtimes$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

2. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}\,(x-2)^{3\alpha}}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{3}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

3. Sia $f(x) = 2|x| + 1$ e si consideri nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ la sua serie di Fourier associata $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $-\frac{2}{3\pi}$; $\boxtimes$ $-\frac{8}{9\pi}$; $\boxed{c}$ $-\frac{4}{9\pi}$; $\boxed{d}$ $-\frac{4}{3\pi}$.

4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^3 f(e^{2x})\, e^{4x} dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{4}\int_2^{2e^3} t f(t)dt$; $\boxed{b}$ $\int_1^{e^3} t^2 f(t)dt$; $\boxtimes$ $\frac{1}{2}\int_1^{e^6} t f(t)dt$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}\int_2^{2e^3} f(t)dt$.

5. Senza calcolare esplicitamente l'integrale, si ha $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\int_8^{x^3} \frac{1}{\log t}\, dt =$ $\boxed{a}$ $\frac{8}{\log 2}$; $\boxed{b}$ $\frac{2}{\log 2}$; $\boxtimes$ $\frac{4}{\log 2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{16\log 2}$.

6. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha che il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2/x} - 1 + \sin(\frac{\sqrt{2}}{x})}{(\frac{1}{x})^{\alpha}\, \frac{1}{\sqrt{x}}\, \cos(\frac{2}{x})}$ esiste finito?

$\boxed{a}$ $\alpha \geq 1/2$; $\boxtimes$ $\alpha \leq 1/2$; $\boxed{c}$ $\alpha \geq \sqrt{2}$; $\boxed{d}$ $\alpha \leq 0$.

7. Sia $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora è necessariamente vero che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{a_n}$: $\boxed{a}$ è divergente negativamente; $\boxed{b}$ è convergente; $\boxed{c}$ non è convergente né divergente; $\boxtimes$ è divergente positivamente.

8. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\log(1+\frac{1}{n})]^{\alpha}}{n^{3\alpha} + \log n}$ è convergente è:

$\boxed{a}$ $\alpha > -1/2$; $\boxed{b}$ $\alpha < -2$; $\boxtimes$ $\alpha > 1/4$; $\boxed{d}$ $\alpha > -1$.

ANALISI MATEMATICA 1		9 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

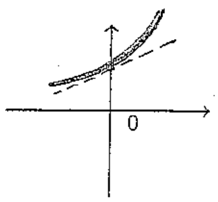
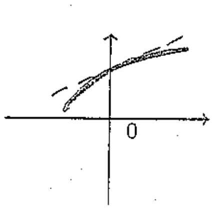
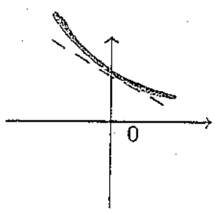
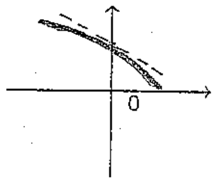
1. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+e^{-n}}{[\sin^2(\frac{1}{n})]^{\alpha}}$ è convergente è:

   [a] $\alpha > 1/4$; [b] $\alpha > -1$; [c] $\alpha > -1/2$; [X] $\alpha < -2$.

2. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-3)y' + y = 3x^3 - 1 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

   Allora il grafico di $y(x)$ vicino all'origine è:

   [a]  ; [X]  ; [c]  ; [d]  .

3. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha che il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\frac{2}{x}) + e^{1/x} - 1}{(\frac{1}{x})^{\alpha}\sqrt{\frac{1}{x}}\cos(\frac{1}{x})}$ esiste finito?

   [a] $\alpha \geq \sqrt{2}$; [b] $\alpha \leq 0$; [c] $\alpha \geq 1/2$; [X] $\alpha \leq 1/2$.

4. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}\,(x-1)^{2\alpha}}$ è convergente è: [a] $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$; [b] $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$; [c] $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{3}$; [X] $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.

5. Sia $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora è necessariamente vero che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(a_n^2)$: [a] non è convergente né divergente; [b] è divergente positivamente; [c] è divergente negativamente; [X] è convergente.

6. Senza calcolare esplicitamente l'integrale, si ha $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\int_{16}^{x^4} \frac{1}{\log t}\,dt =$ [a] $\frac{4}{\log 2}$; [b] $\frac{1}{16\log 2}$; [X] $\frac{8}{\log 2}$; [d] $\frac{2}{\log 2}$.

7. Sia $f(x) = 2|x| + 1$ e si consideri nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ la sua serie di Fourier associata $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$. Allora $a_3 =$ [a] $-\frac{4}{9\pi}$; [b] $-\frac{4}{3\pi}$; [c] $-\frac{2}{3\pi}$; [X] $-\frac{8}{9\pi}$.

8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^3 f(2e^x)\, e^x dx =$ [a] $\frac{1}{2}\int_1^{e^6} tf(t)dt$; [X] $\frac{1}{2}\int_2^{2e^3} f(t)dt$; [c] $\frac{1}{4}\int_2^{2e^3} tf(t)dt$; [d] $\int_1^{e^3} t^2 f(t)dt$.

ANALISI MATEMATICA 1		9 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

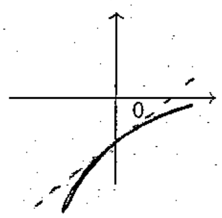
1. Sia $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora è necessariamente vero che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \cos a_n$: $\boxed{a}$ è convergente; $\boxed{b}$ non è convergente né divergente; $\boxtimes$ è divergente positivamente; $\boxed{d}$ è divergente negativamente.

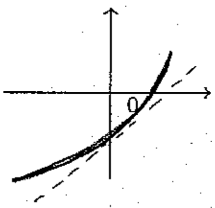
2. Senza calcolare esplicitamente l'integrale, si ha $\displaystyle\lim_{x\to 16} \frac{1}{x-16}\int_4^{\sqrt{x}} \frac{1}{\log t}\,dt =$ $\boxed{a}$ $\frac{2}{\log 2}$; $\boxed{b}$ $\frac{4}{\log 2}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{16\log 2}$; $\boxed{d}$ $\frac{8}{\log 2}$.

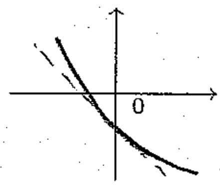
3. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

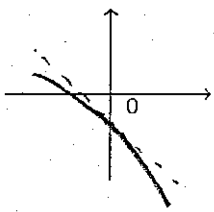
$$\begin{cases} (x-2)y' + 2y = x^2 \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(x)$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxtimes$ 

.

4. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha che il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} \frac{2}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{3x}\right)}{\sin\left(\frac{2}{x}\right) + e^{1/x} - 1}$ esiste finito?
$\boxed{a}$ $\alpha \leq 1/2$; $\boxed{b}$ $\alpha \geq \sqrt{2}$; $\boxed{c}$ $\alpha \leq 0$; $\boxtimes$ $\alpha \geq 1/2$.

5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^3 f(e^{2x})\, e^{4x} dx =$ $\boxed{a}$ $\int_1^{e^3} t^2 f(t)dt$; $\boxtimes$ $\frac{1}{2}\int_1^{e^6} t f(t)dt$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2}\int_2^{2e^3} f(t)dt$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{4}\int_2^{2e^3} t f(t)dt$.

6. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\left(e^{1/n}-1\right)^{\alpha}}{e^{-n}+n^2}$ è convergente è:
$\boxed{a}$ $\alpha < -2$; $\boxed{b}$ $\alpha > 1/4$; $\boxed{c}$ $\alpha > -1$; $\boxtimes$ $\alpha > -1/2$.

7. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+4}\,(x-4)^{3\alpha}}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxtimes$ $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{3}$.

8. Sia $f(x) = |x| + 2$ e si consideri nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ la sua serie di Fourier associata $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $-\frac{8}{9\pi}$; $\boxtimes$ $-\frac{4}{9\pi}$; $\boxed{c}$ $-\frac{4}{3\pi}$; $\boxed{d}$ $-\frac{2}{3\pi}$.

ANALISI MATEMATICA 1		9 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^3 f(e^x)\ e^{3x} dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{4}\int_2^{2e^3} tf(t)dt$; $\boxtimes$ $\int_1^{e^3} t^2 f(t)dt$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2}\int_1^{e^6} tf(t)dt$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}\int_2^{2e^3} f(t)dt$.

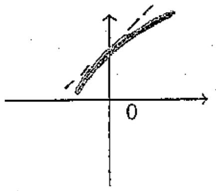
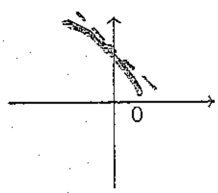
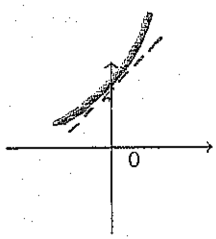
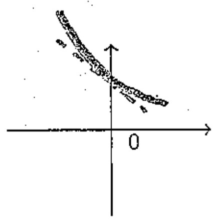
2. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\log(1+\frac{1}{n})]^\alpha}{n^{3\alpha}+\log n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\alpha > -1/2$; $\boxed{b}$ $\alpha < -2$; $\boxtimes$ $\alpha > 1/4$; $\boxed{d}$ $\alpha > -1$.

3. Senza calcolare esplicitamente l'integrale, si ha $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\int_4^{x^2} \frac{1}{\log t}\,dt =$ $\boxed{a}$ $\frac{8}{\log 2}$; $\boxtimes$ $\frac{2}{\log 2}$; $\boxed{c}$ $\frac{4}{\log 2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{16\log 2}$.

4. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-1)y' + y = x^2 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(x)$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxtimes$  ; $\boxed{d}$  .

5. Sia $f(x) = |x| + 1$ e si consideri nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ la sua serie di Fourier associata $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $-\frac{2}{3\pi}$; $\boxed{b}$ $-\frac{8}{9\pi}$; $\boxtimes$ $-\frac{4}{9\pi}$; $\boxed{d}$ $-\frac{4}{3\pi}$.

6. Sia $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora è necessariamente vero che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log a_n$: $\boxtimes$ è divergente negativamente; $\boxed{b}$ è convergente; $\boxed{c}$ non è convergente né divergente; $\boxed{d}$ è divergente positivamente.

7. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha che il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{x}}) + e^{1/\sqrt{x}} - 1}{(\frac{1}{x})^\alpha \frac{2}{\sqrt{x}} \cos(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})}$ esiste finito? $\boxed{a}$ $\alpha \geq 1/2$; $\boxed{b}$ $\alpha \leq 1/2$; $\boxed{c}$ $\alpha \geq \sqrt{2}$; $\boxtimes$ $\alpha \leq 0$.

8. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}\,(x-2)^{3\alpha}}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{3}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

ANALISI MATEMATICA 1		9 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha che il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{x}}) + e^{1/\sqrt{x}} - 1}{(\frac{1}{x})^{\alpha}\, \frac{2}{\sqrt{x}}\, \cos(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})}$ esiste finito? $\boxed{a}$ $\alpha \le 1/2$; $\boxed{b}$ $\alpha \ge \sqrt{2}$; $\boxed{c}$ $\alpha \le 0$; $\boxed{d}$ $\alpha \ge 1/2$.

2. Sia $f(x) = |x| + 2$ e si consideri nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ la sua serie di Fourier associata $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $-\frac{8}{9\pi}$; $\boxed{b}$ $-\frac{4}{9\pi}$; $\boxed{c}$ $-\frac{4}{3\pi}$; $\boxed{d}$ $-\frac{2}{3\pi}$.

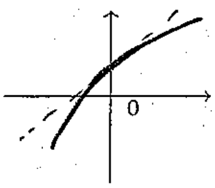
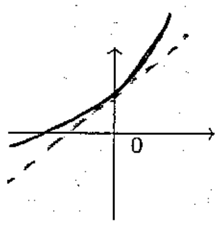
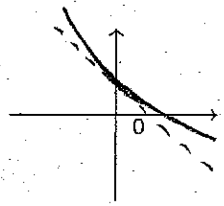
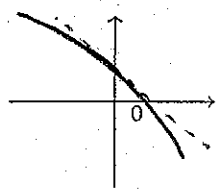
3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^3 f(2e^x)\, e^x dx =$ $\boxed{a}$ $\int_1^{e^3} t^2 f(t)dt$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2}\int_1^{e^6} tf(t)dt$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2}\int_2^{2e^3} f(t)dt$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{4}\int_2^{2e^3} tf(t)dt$.

4. Sia $a_n > 0$ per ogni $n \ge 0$, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora è necessariamente vero che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(a_n^2)$: $\boxed{a}$ è convergente; $\boxed{b}$ non è convergente né divergente; $\boxed{c}$ è divergente positivamente; $\boxed{d}$ è divergente negativamente.

5. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-3)y' + y = 3x^3 - 1 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(x)$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

6. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}\,(x-3)^{2\alpha}}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{3}$.

7. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\log(1+\frac{1}{n^2})]^{\alpha}}{n^3 + e^{-n}}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\alpha < -2$; $\boxed{b}$ $\alpha > 1/4$; $\boxed{c}$ $\alpha > -1$; $\boxed{d}$ $\alpha > -1/2$.

8. Senza calcolare esplicitamente l'integrale, si ha $\displaystyle\lim_{x\to16} \frac{1}{x-16}\int_4^{\sqrt{x}} \frac{1}{\log t}\,dt =$ $\boxed{a}$ $\frac{2}{\log 2}$; $\boxed{b}$ $\frac{4}{\log 2}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{16\log 2}$; $\boxed{d}$ $\frac{8}{\log 2}$.

ANALISI MATEMATICA 1		9 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Senza calcolare esplicitamente l'integrale, si ha $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\int_4^{x^2} \frac{1}{\log t}\,dt =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{16\log 2}$; $\boxed{b}$ $\frac{8}{\log 2}$; $\boxtimes$ $\frac{2}{\log 2}$; $\boxed{d}$ $\frac{4}{\log 2}$.

2. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha che il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\frac{2}{x}) + e^{1/x} - 1}{(\frac{1}{x})^\alpha \sqrt{\frac{1}{x}}\cos(\frac{1}{x})}$ esiste finito?

   $\boxed{a}$ $\alpha \le 0$; $\boxed{b}$ $\alpha \ge 1/2$; $\boxtimes$ $\alpha \le 1/2$; $\boxed{d}$ $\alpha \ge \sqrt{2}$.

3. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}\,(x-1)^{2\alpha}}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{3}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$.

4. Sia $f(x) = |x| + 1$ e si consideri nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ la sua serie di Fourier associata $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$. Allora $a_3 =$ $\boxed{a}$ $-\frac{4}{3\pi}$; $\boxed{b}$ $-\frac{2}{3\pi}$; $\boxed{c}$ $-\frac{8}{9\pi}$; $\boxtimes$ $-\frac{4}{9\pi}$.

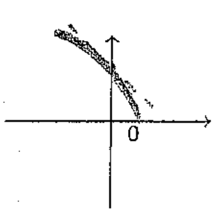
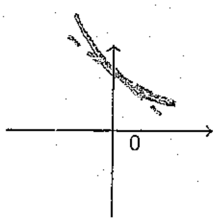
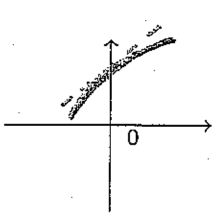
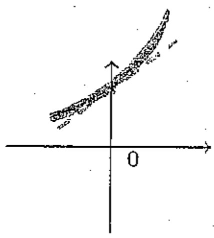
5. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + e^{-n}}{[\sin^2(\frac{1}{n})]^\alpha}$ è convergente è:

   $\boxed{a}$ $\alpha > -1$; $\boxed{b}$ $\alpha > -1/2$; $\boxtimes$ $\alpha < -2$; $\boxed{d}$ $\alpha > 1/4$.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-1)y' + y = x^2 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

   Allora il grafico di $y(x)$ vicino all'origine è:

   $\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxtimes$  .

7. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^3 f(e^x)\, e^{3x}dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{2}\int_2^{2e^3} f(t)dt$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{4}\int_2^{2e^3} tf(t)dt$; $\boxtimes$ $\int_1^{e^3} t^2 f(t)dt$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}\int_1^{e^6} tf(t)dt$.

8. Sia $a_n > 0$ per ogni $n \ge 0$, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora è necessariamente vero che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\log a_n$: $\boxed{a}$ è divergente positivamente; $\boxtimes$ è divergente negativamente; $\boxed{c}$ è convergente; $\boxed{d}$ non è convergente né divergente.

ANALISI MATEMATICA 1		9 gennaio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $f(x) = 3|x| + 1$ e si consideri nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ la sua serie di Fourier associata $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$. Allora $a_3 =$ $\boxed{\xcancel{a}}$ $-\frac{4}{3\pi}$; $\boxed{b}$ $-\frac{2}{3\pi}$; $\boxed{c}$ $-\frac{8}{9\pi}$; $\boxed{d}$ $-\frac{4}{9\pi}$.

2. Sia $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora è necessariamente vero che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{a_n}$: $\boxed{\xcancel{a}}$ è divergente positivamente; $\boxed{b}$ è divergente negativamente; $\boxed{c}$ è convergente; $\boxed{d}$ non è convergente né divergente.

3. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\log(1+\frac{1}{n^2})]^{\alpha}}{n^3 + e^{-n}}$ è convergente è: $\boxed{\xcancel{a}}$ $\alpha > -1$; $\boxed{b}$ $\alpha > -1/2$; $\boxed{c}$ $\alpha < -2$; $\boxed{d}$ $\alpha > 1/4$.

4. Senza calcolare esplicitamente l'integrale, si ha $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \int_8^{x^3} \frac{1}{\log t}\, dt =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{16 \log 2}$; $\boxed{b}$ $\frac{8}{\log 2}$; $\boxed{c}$ $\frac{2}{\log 2}$; $\boxed{\xcancel{d}}$ $\frac{4}{\log 2}$.

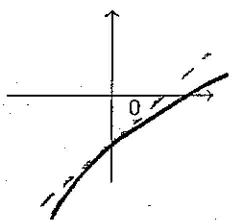
5. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui l'integrale improprio $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}\,(x-3)^{2\alpha}}$ è convergente è: $\boxed{\xcancel{a}}$ $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{3}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$.

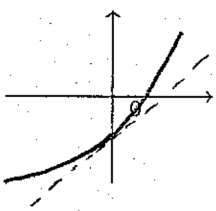
6. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^3 f(2e^x)\, e^{2x} dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{2}\int_2^{2e^3} f(t)dt$; $\boxed{\xcancel{b}}$ $\frac{1}{4}\int_2^{2e^3} tf(t)dt$; $\boxed{c}$ $\int_1^{e^3} t^2 f(t)dt$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}\int_1^{e^6} tf(t)dt$.

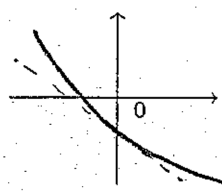
7. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

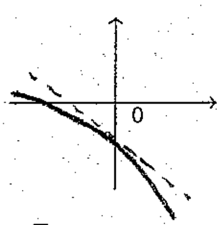
$$\begin{cases} (x-1)y' + 4y = 2x^3 - 3 \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(x)$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{\xcancel{d}}$ 

.

8. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha che il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2/x} - 1 + \sin(\frac{\sqrt{2}}{x})}{(\frac{1}{x})^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\frac{2}{x})}$ esiste finito?

$\boxed{a}$ $\alpha \leq 0$; $\boxed{b}$ $\alpha \geq 1/2$; $\boxed{\xcancel{c}}$ $\alpha \leq 1/2$; $\boxed{d}$ $\alpha \geq \sqrt{2}$.

ANALISI MATEMATICA 1		9 gennaio 2009
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui l'integrale improprio $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+4}\,(x-4)^{3\alpha}}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{6}<\alpha<\frac{1}{3}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{3}<\alpha<\frac{1}{2}$; $\boxtimes$ $\frac{2}{9}<\alpha<\frac{1}{3}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$.

2. Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^3 f(2e^x)\, e^{2x}dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{2}\int_1^{e^6} tf(t)dt$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2}\int_2^{2e^3} f(t)dt$; $\boxtimes$ $\frac{1}{4}\int_2^{2e^3} tf(t)dt$; $\boxed{d}$ $\int_1^{e^3} t^2 f(t)dt$.

3. Sia $a_n>0$ per ogni $n\geq 0$, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora è necessariamente vero che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\cos a_n$: $\boxed{a}$ non è convergente né divergente; $\boxtimes$ è divergente positivamente; $\boxed{c}$ è divergente negativamente; $\boxed{d}$ è convergente.

4. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\left(e^{1/n}-1\right)^{\alpha}}{e^{-n}+n^2}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\alpha>1/4$; $\boxed{b}$ $\alpha>-1$; $\boxtimes$ $\alpha>-1/2$; $\boxed{d}$ $\alpha<-2$.

5. Per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbf{R}$ si ha che il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{1}{x})^{\alpha}\,\frac{2}{\sqrt{x}}\,\cos(\frac{1}{3x})}{\sin(\frac{2}{x})+e^{1/x}-1}$ esiste finito? $\boxed{a}$ $\alpha\geq\sqrt{2}$; $\boxed{b}$ $\alpha\leq 0$; $\boxtimes$ $\alpha\geq 1/2$; $\boxed{d}$ $\alpha\leq 1/2$.

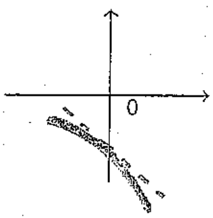
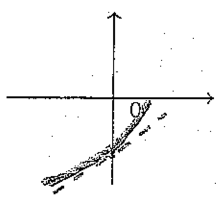
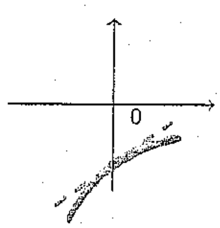
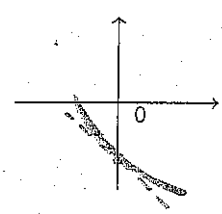
6. Sia $f(x)=3|x|+1$ e si consideri nell'intervallo $(-\pi,\pi)$ la sua serie di Fourier associata $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)]$. Allora $a_3=$ $\boxed{a}$ $-\frac{4}{9\pi}$; $\boxtimes$ $-\frac{4}{3\pi}$; $\boxed{c}$ $-\frac{2}{3\pi}$; $\boxed{d}$ $-\frac{8}{9\pi}$.

7. Senza calcolare esplicitamente l'integrale, si ha $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{16}^{x^4}\frac{1}{\log t}\,dt=$ $\boxed{a}$ $\frac{4}{\log 2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{16\log 2}$; $\boxtimes$ $\frac{8}{\log 2}$; $\boxed{d}$ $\frac{2}{\log 2}$.

8. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases}(x-1)y'+4y=2x^3-3\\ y(0)=-1\,.\end{cases}$$

Allora il grafico di $y(x)$ vicino all'origine è:

$\boxtimes$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

1. **(6 punti)**
Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x^2 - 2x)e^{2x}$. Se ne disegni qualitativamente il grafico (limiti a $+\infty$ e $-\infty$, segno, crescenza/decrescenza), e si determini quindi l'area della regione di piano finita compresa fra il grafico di $f(x)$ e la parabola di equazione $y = 2x - x^2$.

Si ha, ovviamente

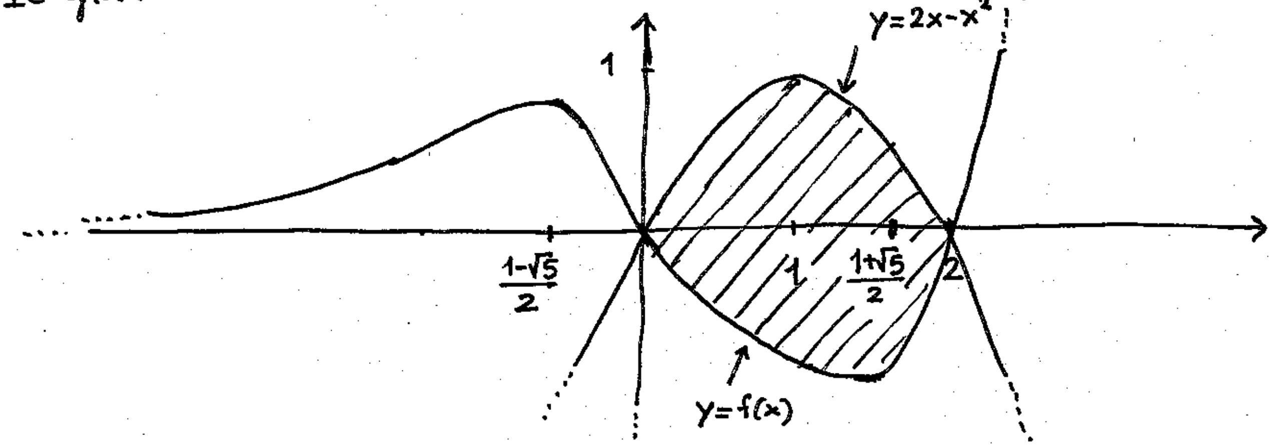
$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-2x)e^{2x} = +\infty \;, \quad \lim_{x\to-\infty} (x^2-2x)e^{2x} \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to+\infty} (t^2+2t)/e^{2t} = 0 \,.$$

Poi $f(x) > 0$ per $x^2-2x > 0$, cioè $x<0$ e $x>2$, mentre $f(x)<0$ per $0<x<2$.

Infine $f'(x) = (2x-2)e^{2x} + (x^2-2x)\cdot 2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2-x-1)$, per cui f cresce per $x^2-x-1>0$, cioè $x<x_1$ e $x>x_2$, ove x_1 e x_2 sono le radici di

$$x^2-x-1=0 \quad \text{cioè} \quad x = \frac{1\mp\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\mp\sqrt5}{2} \,.$$

Il grafico di $f(x)$ e della parabola è dunque qualitativamente:



L'area della regione tratteggiata è data da: | il secondo integrale per parti

$$\int_0^2 [2x-x^2-f(x)]\,dx = \int_0^2 (2x-x^2)\,dx + \int_0^2 (2x-x^2)e^{2x}\,dx = \left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 +$$

$$+ (2x-x^2)\frac12 e^{2x}\Big|_0^2 - \frac12\int_0^2 e^{2x}(2-2x)\,dx =$$

$$= 4-8/3 + 0 - \int_0^2 e^{2x}(1-x)\,dx = \frac43 - \frac12 e^{2x}(1-x)\Big|_0^2 + \frac12\int_0^2 e^{2x}(-1)\,dx =$$

$$= \frac43 + \frac12 e^4 + \frac12 - \frac14 e^{2x}\Big|_0^2 = \frac43 + \frac12 e^4 + \frac12 - \frac14 e^4 + \frac14 = \frac{25}{12} + \frac14 e^4 \,.$$

2. (6 punti)
Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x\cos x}{e^{x^3} - e^{3x^3}} .$$

Si ha, per $t \to 0$:

$$\sin t = t - t^3/6 + o(t^3) \ ; \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \ ; \quad e^t = 1 + t + o(t) ,$$

dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x\cos x}{e^{x^3} - e^{3x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - 8x^3/6 + o(x^3) - 2x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{1 + x^3 + o(x^3) - \left(1 + 3x^3 + o(x^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x} - 4x^3/3 - \cancel{2x} + x^3 + o(x^3)}{\cancel{1} + x^3 - \cancel{1} - 3x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-2x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{6} .$$

[Con l'Hôpital:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos(2x) - 2\cos x + 2x\sin x}{3x^2 e^{x^3} - 9x^2 e^{3x^3}}$$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-4\sin(2x) + 2\sin x + 2\sin x + 2x\cos x}{6x e^{x^3} + 9x^4 e^{x^3} - 18x e^{3x^3} - 81x^4 e^{3x^3}}$$

$$\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{-8\cos(2x) + 4\cos x + 2\cos x - 2x\sin x}{6e^{x^3} + 18x^3 e^{x^3} + 36x^3 e^{x^3} + 27x^6 e^{x^3} - 18e^{3x^3} - 162x^3 e^{3x^3} - 324x^3 e^{3x^3} - 729x^6 e^{3x^3}} .$$

Siccome

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6} , \quad \text{anche } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{6} .]$$

3. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\sin x + \cos x \sin x \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

L'equazione si riscrive come $y' - (\sin x)\, y = \cos x \sin x$, dunque la formula risolutiva dà:

$$y(x) = e^{\int_0^x \sin t\, dt} \left(\alpha + \int_0^x e^{-\int_0^s \sin t\, dt} \cos s \sin s\, ds \right) =$$

$$= e^{-\cos x + 1} \left(\alpha + \int_0^x e^{\cos s - 1} \cos s \operatorname{sen} s\, ds \right) =$$

$\cos s = u$
$du = -\sin s\, ds$
$s = 0 \to u = 1$
$s = x \to u = \cos x$

$$= e^{-\cos x + 1} \left(\alpha + \int_1^{\cos x} e^{u-1} (-u)\, du \right) =$$

$$= e^{-\cos x + 1} \left(\alpha - \frac{1}{e} \int_1^{\cos x} u e^u\, du \right) =$$

per parti

$$= e^{-\cos x + 1} \left[\alpha - \frac{1}{e} \left(u e^u \Big|_1^{\cos x} - \int_1^{\cos x} e^u\, du \right) \right] =$$

$$= e^{-\cos x + 1} \left[\alpha - \frac{1}{e} \left(\cos x\, e^{\cos x} - e - e^u \Big|_1^{\cos x} \right) \right] =$$

$$= e^{-\cos x + 1} \left[\alpha - \frac{1}{e} \cos x\, e^{\cos x} + \cancel{1} + \frac{1}{e} e^{\cos x} - \cancel{1} \right] =$$

$$= \alpha e^{-\cos x + 1} - \cos x + 1 .$$